Educación Básica

8

Educación Matemática

Programa de Estudio
Octavo Año Básico

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Educación Matemática

Programa de Estudio
Octavo Año Básico / NB6

Edición corregida

EDUCACION
Nuestra Riqueza
GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Educación Matemática
Programa de Estudio Octavo Año Básico / Nivel Básico 6
Educación Básica, Unidad de Curriculum y Evaluación
ISBN 956-292-007-0
Registro de Propiedad Intelectual Nº 124.549
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición 2002
Segunda Edición 2004

Santiago, noviembre de 2001

Estimados profesores y profesoras:

El presente programa de estudio de Octavo Año Básico ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, en el año escolar 2002.

En sus objetivos, contenidos y actividades, busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica, definido en el Decreto N°240, de junio de 1999, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Octavo Año Básico plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes a Octavo Año Básico incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de Octavo Año Básico para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.

Mariana Aylwin

MARIANA AYLWIN OYARZUN
Ministra de Educación

Presentación	9
Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa	13
Objetivos Fundamentales	14
Organización del programa	15
Cuadro sinóptico: Unidades, contenidos y distribución temporal	16
Unidad 1: Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros	18
Actividades	21
Actividades propuestas para la evaluación	52
Unidad 2: Relaciones proporcionales	54
Actividades	57
Actividades propuestas para la evaluación	84
Unidad 3: Números y ecuaciones	88
Actividades	90
Actividades propuestas para la evaluación	116
Unidad 4: Potencias	118
Actividades	121
Actividades propuestas para la evaluación	147
Unidad 5: Volumen	150
Actividades	152
Actividades propuestas para la evaluación	173
Bibliografía recomendada Educación Matemática NB6	175
Anexo 1: Ejemplos de mapas dibujados a diferentes escalas	179
Anexo 2: Encuestas de opinión	187
Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Quinto a Octavo Año Básico	199

Presentación

En el presente programa, como en los de niveles anteriores, se propone la continuación de los procesos de construcción y adquisición de conocimientos matemáticos y de modos de pensar en este ámbito que los estudiantes necesitan hacer propios, utilizar y seguir desarrollando durante toda su vida, con el fin de enfrentar los desafíos que el creciente avance científico y tecnológico les plantea, y para una participación crítica, consciente e informada en la sociedad.

El programa está orientado de manera que se consideren, por una parte, los conocimientos adquiridos anteriormente por los alumnos y alumnas y, por otra, sus intereses, tomando en cuenta que se encuentran en el último curso de la Educación Básica. Es decir, se trata de adolescentes cuyos intereses por el mundo exterior son crecientes y que están más insertos en la vida social, política, económica. Se ha dado particular importancia, en continuidad con el trabajo de los niveles anteriores, al desarrollo de la capacidad de los estudiantes para justificar sus procedimientos, propios o convencionales, y para fundamentar adecuadamente conclusiones generales.

Con el fin de ampliar su comprensión sobre aspectos numéricos y geométricos de la realidad, iniciados en los programas anteriores, se profundiza el trabajo sobre el uso y el sentido de los números naturales y decimales en múltiples situaciones, incorporando el uso de signos en los números y ampliando así el significado de las operaciones, el cálculo mental, la estimación y el cálculo aproximado. Se incorpora el trabajo con otros números, tales como *pi* (π). Se promueve el uso de la calculadora tanto para resolver operaciones que requieren de cálculos (en ocasiones largos y tediosos, que pueden distraer la atención de aspectos centrales del problema que se desea resolver), como para facilitar la investigación de regularidades numéricas.

Se desarrollan en mayor profundidad nociones relacionadas con el sistema decimal de numeración y las potencias de diez con el fin de establecer generalizaciones respecto de él. Se amplía, de este modo, la expresión de cantidades utilizando la notación de potencias y, en particular, la expresión de cantidades como una suma ponderada de potencias de diez. En este ámbito, se propone trabajar particularmente en relación con el subsector Estudio y Comprensión de la Naturaleza.

Un tema importante que se comenzó a trabajar sistemáticamente en Séptimo Año Básico es el referido a las relaciones proporcionales y no proporcionales entre magnitudes. La proporcionalidad constituye la base de múltiples aspectos de las matemáticas que se incorporarán en la Educación Media (por ejemplo, funciones lineales, ecuaciones de la recta, sistemas de ecuaciones, entre otros). En este nivel, lo central del trabajo está en la incorporación de representaciones gráficas de situaciones de proporcionalidad y en el establecimiento de las características fundamentales tanto de la proporcionalidad directa como de la inversa.

En geometría, se continúa el estudio de figuras y cuerpos geométricos y el análisis de las propiedades y relaciones geométricas. Esto último se realiza a través de diversas situaciones que están al alcance de los alumnos y alumnas, tales como construcción, dibujo, manipulación, más que en sus definiciones y clasificaciones preestablecidas. Se propone, también, continuar con el trabajo relacionado con medición y cálculo de áreas y perímetros de figuras planas, poniendo énfasis en los efectos que tienen en dichas magnitudes los cambios que se introducen en algunos elementos de las figuras. También se incorpora, por primera vez de manera sistemática, la medición y cálculo del volumen de cuerpos geométricos poliedros y redondos.

Un tema que comienza también por primera vez a desarrollarse de manera sistemática es el de la expresión algebraica de situaciones matemáticas. Aunque éste constituye el foco de una de las unidades del programa, será tratado a lo largo de todas ellas. En particular, el uso de ecuaciones de primer grado, como un modelo e instrumento útil para resolver problemas, será incorporado tanto en contextos geométricos (para el cálculo de volúmenes, por ejemplo, con uso de fórmulas) como en contextos numéricos (resolución de problemas de proporcionalidad, por ejemplo).

Como en los programas anteriores, esto constituye una característica fundamental de este programa, dado que es frente a la necesidad de resolver problemas cuando los contenidos de aprendizaje adquieren sentido y se hacen necesarios. Así, los alumnos y alumnas pueden percibir por qué y para qué aprenden, valorar la importancia de los conocimientos y la necesidad de construir otros nuevos, los que se van construyendo sobre la base de los anteriores en contextos que les dan sentido.

En consecuencia, tal como en niveles anteriores, en el Programa de Octavo Año Básico se propone la resolución de problemas como un medio fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Combinada de manera pertinente con otro tipo de actividades de aprendizaje, como juegos, debates, investigaciones, exposiciones (de docentes y estudiantes), ejercitaciones, etc., ella contribuye a generar aprendizajes significativos y al desarrollo de la confianza en la propia capacidad para enfrentar con éxito nuevos desafíos cognitivos. El trabajo contextualizado permite desarrollar la capacidad de seleccionar métodos de cálculo adecuados y de evaluar resultados.

Una tarea central y permanente de las profesoras y profesores es buscar y diseñar situaciones fecundas en preguntas y problemas que sean accesibles y de interés para las niñas y niños. Los problemas y situaciones deben provenir de su vida cotidiana, de sus juegos, de lecturas e informaciones históricas o de actualidad que tengan sentido para los estudiantes, y de otras ramas del conocimiento (ciencias naturales y ciencias sociales, artes, tecnología, etc.).

En el programa se presenta un conjunto de **actividades** que es necesario que los alumnos y las alumnas enfrenten para alcanzar los aprendizajes esperados, seguidos por **ejemplos** concretos que pueden ser desarrollados tal cual han sido diseñados; no obstante, cada vez que sea necesario, los ejemplos deben ser adaptados o deben crearse otros nuevos. En esta tarea, es muy importante procurar que todas las situaciones de aprendizaje propuestas a las alumnas y alumnos les den múltiples oportunidades para:

- explorar y probar estrategias diversas para resolver problemas;
- desarrollar procesos ordenados y sistemáticos para la resolución de problemas o desafíos matemáticos;
- sistematizar procedimientos y resultados;
- comunicar procesos, resultados y conclusiones, incorporando, progresivamente, el uso de lenguaje matemático;
- justificar, argumentar y fundamentar tanto resultados como procedimientos;
- buscar y establecer regularidades y patrones, tanto en el ámbito de los números como del espacio y la geometría;
- trabajar con materiales manipulables concretos y simbólicos;
- desarrollar trabajos individuales y colectivos, en los que discutan tanto sobre procedimientos y resultados como sobre el sentido de las actividades;
- proponer nuevas preguntas y problemas;
- detectar y corregir sus errores.

Tanto por lo señalado como por las características de las alumnas y alumnos de este nivel y de las condiciones reales en las que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje, es muy importante que los docentes aborden con flexibilidad el diseño de situaciones de aprendizaje y propongan actividades variadas. Deberán tener en cuenta, también, que algunas actividades permiten enfatizar unas experiencias de aprendizaje más que otras. Así, por ejemplo, la resolución sistemática de un cierto tipo de problemas permite, a menudo, buscar y encontrar regularidades y sistematizar procedimientos; las investigaciones pueden permitir hacerse preguntas sobre problemas de la realidad y/o explorar estrategias diversas para proponer soluciones.

Finalmente, con el fin de dar sentido a los aprendizajes específicos de matemáticas, así como para contribuir a la formación de un pensamiento globalizador, es importante tener en cuenta en el diseño de las actividades de aprendizaje los desafíos en términos de contenidos que deben enfrentar los estudiantes en otros subsectores de aprendizaje. A menudo, éstos son no sólo oportunidades para aplicar conocimientos matemáticos sino que los problemas que en ellos surgen son ilustraciones adecuadas de nociones matemáticas importantes.

Es importante que la profesora o profesor procure una participación equitativa de hombres y mujeres cuando se organizan trabajos en grupos mixtos y, en general, durante el desarrollo de las clases. En este sentido, es importante verificar la alternancia de roles directivos y de organización al interior de los grupos y promover las intervenciones de las alumnas al momento de dialogar o de exponer públicamente los trabajos realizados.

La evaluación de los aprendizajes es concebida como un proceso que está al servicio de la enseñanza y del aprendizaje. De este modo, en este programa se propicia tanto el acompañamiento y observación del desempeño de niñas y niños durante las actividades de aprendizaje como la observación al término de cada unidad, a partir de actividades expresamente sugeridas para ello. La orientación fundamental sobre qué evaluar está dada por los aprendizajes esperados de cada unidad; el cómo evaluar está dado por el tipo de actividades de aprendizaje que se propone.

Las actividades de aprendizaje abren espacios para la autoevaluación y coevaluación, en las que alumnos y alumnas comparten procedimientos y resultados, discuten sobre ellos, sintetizan, pueden detectar y corregir errores. Del mismo modo, éstas son instancias adecuadas para la evaluación por parte de la profesora o profesor, quien puede distinguir qué ayuda y qué obstaculiza los procesos de aprendizaje, con el fin de reflexionar, proponer caminos alternativos y elegir las formas de apoyo más adecuadas. Es importante que los docentes lleven algún registro de sus observaciones, carpetas donde se guardan los trabajos, por ejemplo, con el fin de apoyar sus decisiones de cambio de actividades, refuerzo y apoyos individualizados.

En este programa, al finalizar cada una de las unidades, se entregan ejemplos de actividades y problemas de evaluación que tienen el propósito de observar la consecución de los aprendizajes esperados definidos para cada una de ellas. Se han seleccionado para ilustrar el tipo de situación y de problemas que podrían facilitar la obtención de información útil para orientar decisiones y también evaluar el logro. Estas actividades sugeridas están acompañadas por algunos indicadores que orientan respecto de qué observar en el desarrollo de cada una de ellas en relación con el o los aprendizajes esperados involucrados. Algunas de las actividades sugeridas pueden ser trabajadas en grupo y otras se prestan mejor para el trabajo individual. En general, podrían incorporarse en instancias o instrumentos especiales de evaluación, tales como trabajos durante las clases y pruebas escritas.

Uno de los criterios para la definición de las formas que tome la evaluación es que ésta debe ser consecuente con el propósito de mejorar el aprendizaje. Si se evalúa, por ejemplo, sólo la repetición memorística de datos, se está reforzando la idea de que ése es el tipo de educación que se quiere promover; si se evalúan desempeños, capacidad de resolver problemas, de manejar información, se está propiciando una educación flexible, abierta, con más sentido para quienes aprenden, con propósitos inmediatos (sirve para hoy) y de largo plazo (preparan para la vida adulta).

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia escolar, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están construidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto N° 240) corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Básica en tres ámbitos: *Formación Ética*, *Crecimiento y Autoafirmación Personal*, y *Persona y Entorno;* su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo los Objetivos Transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente gran parte de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Básica.

En el programa de Matemáticas de Octavo Año Básico se refuerzan los OFT que tuvieron presencia y oportunidad de desarrollo durante los niveles anteriores y se adicionan otros propios de las nuevas unidades. En este sentido, se profundizan e incorporan:

- Los OFT del ámbito *Formación Ética* relacionados con los valores de autonomía y responsabilidad individual y colectiva frente a trabajos o tareas, y el respeto y valoración de las ideas y creencias diferentes a las propias, a través de actividades que inducen a la selección de procedimientos frente a problemas, y discusión y evaluación grupal de su pertinencia.
- Los OFT vinculados al desarrollo de las habilidades de *Pensamiento* como son la exploración de estrategias cognitivas en la resolución de proble-

mas, la anticipación de resultados y la utilización de los sistemas y el instrumental de las matemáticas en la interpretación del mundo circundante, en la recopilación, sistematización, interpretación, evaluación y comunicación de información y en la apropiación significativa de la realidad.

- Los OFT del ámbito *Crecimiento y Autoafirmación Personal*, en especial los relativos al interés en conocer la realidad, y habilidades de selección de información, uso del conocimiento, razonamiento metódico y reflexivo, y resolución de problemas. El programa plantea objetivos, contenidos y actividades que buscan desarrollar en alumnas y alumnos las capacidades de explorar diferentes estrategias para resolver problemas, sistematizar procedimientos, descubrir regularidades y patrones, organizar y analizar información cuantitativa, justificar y comunicar eficazmente procedimientos y resultados, detectar y corregir errores, dando énfasis al trabajo metódico.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo en equipo. A través de los problemas por resolver matemáticamente que se plantean, es posible ampliar el trabajo de los OFT a la capacidad de juicio de alumnos y alumnas, y a la aplicación de criterios morales a problemas del medio ambiente, económicos y sociales y de la vida diaria.

Objetivos Fundamentales

Los Objetivos Fundamentales correspondientes al 8º Año Básico y que constituyen las metas generales por alcanzar por todas las alumnas y alumnos a lo largo del año escolar, determinados en el Decreto 240, son los siguientes:

1. Utilizar sistemáticamente razonamientos ordenados y comunicables para la resolución de problemas numéricos y geométricos.
2. Percibir las posibilidades que ofrece el sistema de numeración decimal para expresar cantidades cualesquiera, por grandes o pequeñas que éstas sean.
3. Resolver problemas utilizando las potencias para expresar y operar con grandes y pequeñas cantidades.
4. Reconocer que una amplia gama de problemas se pueden expresar, plantear y resolver utilizando expresiones algebraicas simples.
5. Estimar y acotar, de manera pertinente y razonable, resultados de operaciones con decimales positivos y negativos; expresarlos en fracciones según posibilidades y conveniencia de acuerdo a la situación.
6. Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados utilizando y fundamentando diversas formas de presentar la información y resultados del análisis de acuerdo a la situación.
7. Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos).
8. Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas.

Organización del programa

El Programa del NB6 ha sido organizado en 5 unidades. En cada una de ellas se señalan los aprendizajes esperados para alumnas y alumnos. En su conjunto, estos aprendizajes esperados recogen y especifican los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios que orientan el trabajo de todo el año escolar.

Se propone, también, una secuencia de las unidades. No obstante, los profesores y profesoras pueden organizarlas a lo largo del año escolar en una secuencia diferente, aplicando criterios de flexibilidad y considerando las características de los cursos con los cuales trabajan.

Las unidades que constituyen el programa se presentan en un cuadro sinóptico en el cual se describen los temas centrales de cada una de ellas y se señala el tiempo estimado para su desarrollo. El tiempo propuesto es, sobre todo, un indicador de la extensión de las unidades y deberá ser adaptado, cada vez que sea necesario, a la realidad específica de los cursos.

Finalmente, se presenta el desarrollo de cada una de las unidades, señalando:

- los aprendizajes esperados y los contenidos;
- una introducción con algunas definiciones y recomendaciones didácticas en la que, además, se señalan los objetivos fundamentales abordados en la unidad;
- un conjunto de actividades de aprendizaje acompañadas de comentarios para los docentes y seguidas por ejemplos que permiten su contextualización;
- sugerencias de actividades y problemas para la evaluación.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades		
1 **Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros**	**2** **Relaciones proporcionales**	**3** **Números y ecuaciones**
Contenidos		
Construcción de polígonos por combinación de otros. Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de polígonos. Investigación sobre la suma de los ángulos interiores de polígonos y el número de lados de éstos. Resolución de problemas. Investigación de las relaciones entre los ángulos que se forman al interceptar dos rectas por una tercera. Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás. Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias. Significado geométrico y numérico del número π. Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencia. Uso de aproximaciones convenientes para números decimales infinitos. Uso de ecuaciones para resolver problemas e interpretar fórmulas.	**Proporcionalidad** Elaboración de tablas y gráficos correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa. Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa mediante un producto constante y un cuociente constante, respectivamente. Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes). Realización e interpretación de planos esquemáticos a escala. Cálculo de porcentajes y elaboración y análisis de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado, utilizando calculadora. **Tratamiento de información** Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa, en relación con relaciones y variaciones proporcionales y porcentajes. Lectura y análisis de encuestas de opinión en relación con proporciones y porcentajes.	**Números positivos y negativos** Interpretación del uso de signos en los números, en la vida diaria, en contextos ligados a: la línea cronológica (aC, dC), la medición de temperatura (bajo 0, sobre 0), la posición respecto del nivel del mar. Comparación de números enteros con apoyo en la recta numérica. Resolución de problemas que impliquen realizar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos, con y sin apoyo en la recta numérica. **Ecuaciones de primer grado** Noción de igualdad de expresiones algebraicas. Traducción de situaciones y problemas a ecuaciones con una incógnita. Uso de propiedades de los números y de las operaciones para encontrar soluciones. Creación de diversos problemas con sentido a partir de ecuaciones con una incógnita. **Tratamiento de información** Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.
Distribución temporal		
Tiempo estimado: 6-8 semanas	Tiempo estimado: 7-9 semanas	Tiempo estimado: 7-9 semanas

4 **Potencias**	5 **Volumen**
Potencias de base natural y exponente entero Potencias como multiplicación de factores iguales. Análisis y comparación de la representación gráfica (geométrica) de a^2 y de a^{-2}. Interpretación de a^{-2} y de a^{-3} como $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{a^3}$ respectivamente. Análisis de situaciones de crecimiento y de decrecimiento exponencial. Investigación de regularidades y propiedades de operaciones con potencias a partir de la resolución de problemas. **Sistema de numeración decimal** Asociación de una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo a cada posición en el sistema de numeración. Interpretación y expresión de resultados como sumas ponderadas de potencias de 10 en situaciones problema. **Números decimales y fracciones** Resolución de problemas en los que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos e infinitos periódicos. Uso de la calculadora para investigar y establecer patrones en familias de números decimales. Uso de aproximaciones convenientes de números decimales infinitos. **Tratamiento de información** Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa. Lectura y análisis de resultados de encuestas de opinión.	Estimación y cálculo del volumen de cuerpos geométricos regulares expresándolos en unidades pertinentes. Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de prismas rectos. Construcciones de redes para armar cilindros y conos. Experimentación de procedimientos concretos para medir el volumen de conos y cilindros. Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros y conos. Relaciones de equivalencia entre unidades de volumen de uso corriente. Uso de ecuaciones para resolver problemas e interpretar fórmulas. Uso de aproximaciones convenientes de números decimales infinitos.
Tiempo estimado: 6-8 semanas	Tiempo estimado: 8-10 semanas

Unidad 1

Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros

TIEMPO ESTIMADO: 6-8 SEMANAS

Contenidos

- Construcción de polígonos por combinación de otros. (Composición y descomposición). Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de polígonos.
- Investigación sobre la suma de los ángulos interiores de polígonos y el número de lados de éstos. Resolución de problemas.
- Investigación de las relaciones entre los ángulos que se forman al intersectar dos rectas por una tercera.
- Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás.
- Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias.
- Significado geométrico y numérico del número π
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencia.
- Uso de aproximaciones convenientes para números decimales infinitos.
- Uso de ecuaciones para resolver problemas e interpretar fórmulas.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Caracterizan los polígonos regulares en función de sus elementos, de la relación entre estos elementos y entre polígonos.
2. En situaciones problema utilizan las relaciones entre los ángulos obtenidos entre dos rectas que se intersectan y entre rectas paralelas cortadas por una transversal.
3. Caracterizan el número π desde el punto de vista geométrico y numérico.
4. Utilizan de manera pertinente fórmulas para calcular el perímetro y el área de figuras compuestas por circunferencias y polígonos.
5. En problemas geométricos fundamentan sus respuestas basándose en las relaciones entre los ángulos o entre las figuras y explican sus procedimientos utilizando las ecuaciones u otros métodos de resolución.

Orientaciones didácticas

En esta unidad se reúnen aspectos de la geometría referidos a polígonos, ángulos entre rectas paralelas cortadas por una transversal, circunferencias; medición y cálculo de perímetros y áreas de estas figuras y combinaciones de ellas.

Es a partir de las relaciones entre ángulos que se forman entre rectas paralelas que se vuelve a mirar las características de figuras poligonales. Es decir, no se propone una mirada aislada de contextos de dichas relaciones sino que se ponen al servicio de un mayor conocimiento y comprensión de características fundamentales de diversos tipos de polígonos.

Por otra parte, se proponen situaciones problema en las cuales se hace necesario el uso de ecuaciones para formular y fundamentar tanto un procedimiento de resolución como las soluciones encontradas. Como en programas anteriores, se pone un marcado énfasis en la fundamentación y en el desarrollo de razonamientos sistemáticos y ordenados frente a situaciones diversas.

Con respecto a las circunferencias, que fueron observadas, manipuladas, combinadas, dibujadas, etc. ya en el primer ciclo, en este nivel se estudian en particular sobre la base de los conocimientos ya adquiridos sobre polígonos regulares. De este modo se propone a los alumnos y alumnas un procedimiento que eventualmente lleve a la construcción de un polígono regular con infinito número de lados, lo que resultaría en la construcción de una circunferencia.

Por otra parte, a partir de las relaciones entre diámetro y perímetro de una circunferencia se visualiza el número pi (π). Es decir, se puede visualizar este número irracional particular a partir de experiencias geométricas y numéricas. Y, en este contexto, se abordan los números decimales infinitos, llamados, también, números irracionales.

A partir de las eventuales dificultades prácticas para medir el perímetro y el área de circunferencias se trabaja el cálculo de ellas incorporando el uso de fórmulas. Por otra parte, dada la experiencia de niveles anteriores respecto del cálculo de perímetro y áreas de polígonos, en este nivel se proponen problemas que implican estos cálculos en cualquier tipo de figura, resultantes de combinaciones de otras conocidas.

Como en niveles anteriores, se vuelve sobre la observación y análisis del efecto que produce sobre el perímetro y/o el área de figuras la variación sistemática de alguno o algunos de sus elementos. En este nivel, a la observación y análisis se agregan nociones y herramientas tales como la relación entre ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal.

Como ya se ha dicho, siguiendo con el enfoque desarrollado durante el transcurso de la enseñanza básica, se presta especial atención al desarrollo de argumentos, procesos sistemáticos de observación, análisis y resolución de situaciones, a la fundamentación, obtención y justificación de conclusiones.

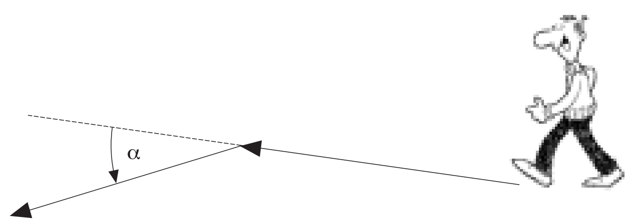
Actividades

Actividad 1

Analizan situaciones que involucran ángulos y, a partir de figuras que se forman entre rectas, investigan y modifican estas rectas para observar el efecto sobre los ángulos de las figuras. Establecen conclusiones sobre los ángulos que se forman entre rectas paralelas cortadas por una transversal y entre rectas que se intersectan.

Ejemplos

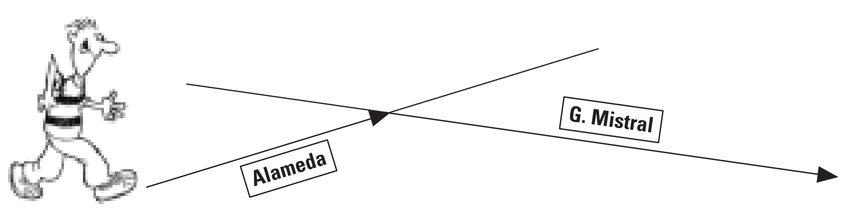
1. Realizan las siguientes actividades bajo el supuesto que el cambio de dirección en una trayectoria se puede asociar a un giro en un cierto ángulo, como puede apreciarse en el siguiente dibujo.



∡ α indica el ángulo de giro

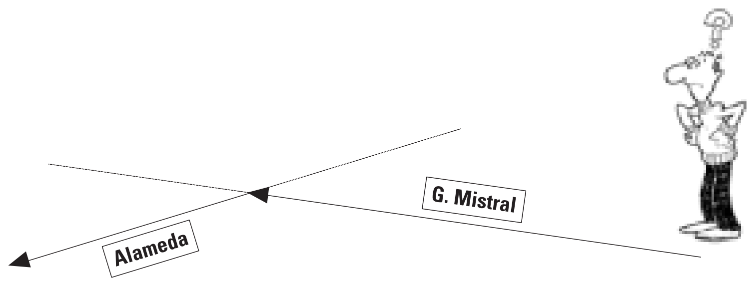
a) Simulan trayectorias realizando giros en distintos ángulos (45°, 90°, 180°, 360°). Identifican "la calle" en donde se inicia el trayecto y el ángulo de giro necesario para llegar a "la calle" de destino.

b) Una persona camina por la calle Alameda y luego gira a la calle G. Mistral, como se muestra en el siguiente dibujo:



- ¿Cuál es el ángulo de giro que permite realizar esa trayectoria? Marcan con lápiz de color el ángulo y lo miden con transportador.

- El ángulo que permite realizar la trayectoria mide 40˚. ¿De qué medida es el ángulo de giro que permite realizar el trayecto de vuelta, es decir, desde la calle G. Mistral hacia la calle Alameda, en dirección contraria a la flecha? (sin utilizar transportador).



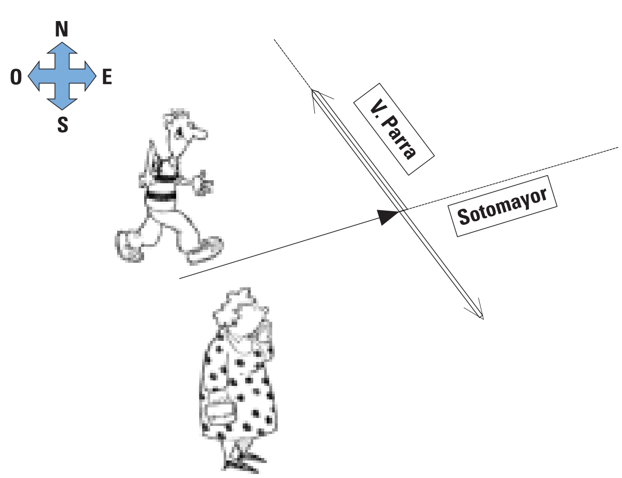
- Responden preguntas como las siguientes:

  Si consideras la ubicación de estos dos ángulos, ¿qué relación tienen?

  ¿Qué relación tienen las dos medidas de los ángulos anteriores?, ¿por qué?, ¿esta relación se mantiene si se varía la medida del ángulo? Por ejemplo, si el ángulo de giro desde Alameda hacia G. Mistral mide 50˚ ó 45˚ ó 60˚.

  Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos opuestos por el vértice.

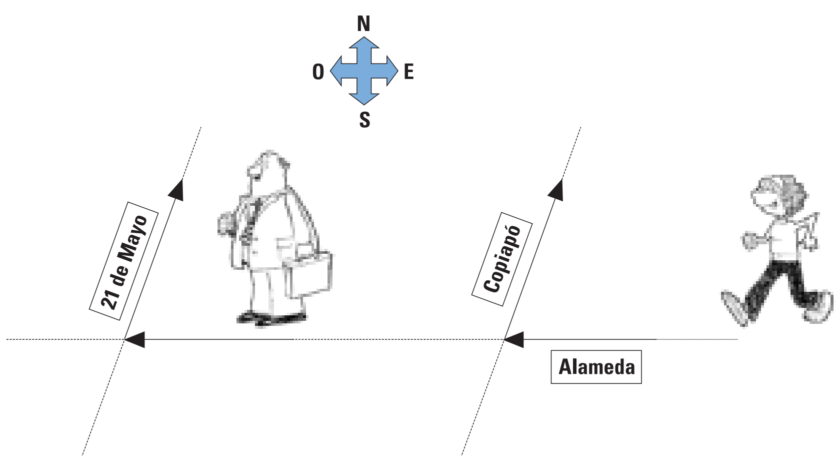
c) Las calles V. Parra y Sotomayor se interceptan como muestra el siguiente dibujo. El Sr. Rojas y la Sra. Domínguez caminan por la calle Sotomayor. Él dobla a la calle V. Parra, en dirección al noroeste. En cambio, la señora Domínguez dobla por la misma calle hacia el sudeste.



- Marcan los ángulos de giro de las dos trayectorias. Miden, utilizando un transportador, la medida del ángulo de giro de ambas trayectorias. Comparan las medidas obtenidas.
- Responden preguntas como las siguientes:

  Si consideras la ubicación de estos dos ángulos, ¿qué relación tienen las dos medidas de los ángulos anteriores?, ¿por qué?, ¿se mantiene esta relación si se varía la medida del ángulo? Por ejemplo, si el ángulo de giro de la trayectoria que realiza el Sr. Rojas mide 110˚ ó 140˚ ó 70˚ ó 65˚.
- Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos suplementarios adyacentes.

d) Las calles Copiapó y 21 de Mayo son paralelas y ambas interceptan a la calle Alameda. Dos personas caminan por la calle Alameda, desde el este hacia el oeste. Cada una dobla hacia calles paralelas entre sí, como muestra el dibujo.



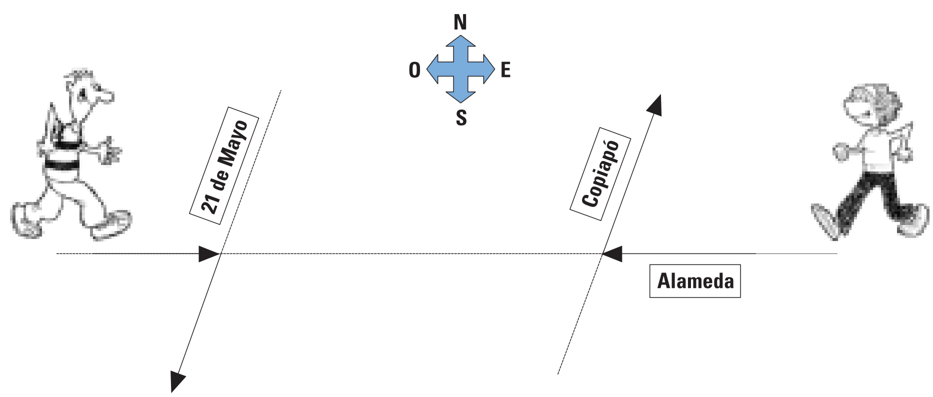
- Contestan preguntas como las siguientes:
  ¿Cuál es el ángulo de giro en cada caso? Márcalos.
  ¿Cuál es la medida del ángulo de giro en ambos casos?
  ¿Qué relación existe entre ambos ángulos?, ¿por qué?

  ¿Se mantiene esta relación si se varía la medida del ángulo de intersección de las calles Copiapó y 21 de Mayo con la calle Alameda? (manteniéndose el paralelismo en ambas calles). Por ejemplo, si el ángulo de giro desde Alameda a Copiapó es de 110˚ ó 140˚ ó 70˚ ó 65˚, lo mismo que el ángulo de giro de 21 de Mayo y la Alameda.
- Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos correspondientes entre rectas paralelas.

- Ante la misma situación responden:

  ¿Se mantiene la relación entre medidas de los ángulos si sólo se cambia el ángulo de intersección de la calle Copiapó con Alameda, es decir, si Copiapó y 21 de Mayo ya no son paralelas?

e) En las mismas calles anteriores, una mujer parte en la calle Alameda desde el este al oeste y dobla por la calle Copiapó hacia el norte y un hombre camina desde el oeste al este doblando a la calle 21 de Mayo hacia el sur. Observa el dibujo.



- Contestan preguntas como las siguientes:

  ¿Cuál es el ángulo de giro en cada caso? Márcalos.

  ¿Cuál es la medida del ángulo de giro en ambos casos?

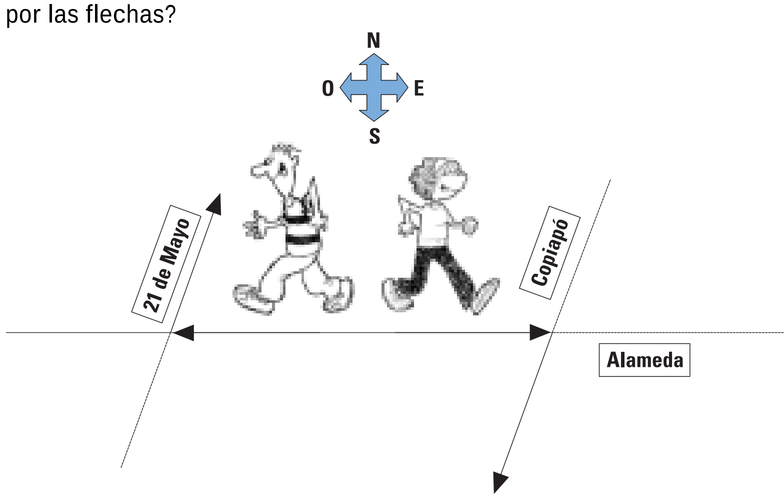
  ¿Qué relación existe entre las medidas de ambos ángulos?, ¿por qué?

  ¿Se mantiene esta relación si se varía la medida del ángulo de intersección de las calles Copiapó y 21 de Mayo con la calle Alameda? (manteniéndose el paralelismo en ambas calles). Por ejemplo, si el ángulo de giro desde Alameda a Copiapó es de 110˚ ó 140˚ ó 70˚ ó 65˚, lo mismo que el ángulo de giro de 21 de Mayo y la Alameda?

  ¿Se mantiene esta relación si sólo se cambia el ángulo de intersección de la calle Copiapó con Alameda, es decir, si Copiapó y 21 de Mayo **ya no son paralelas**?

  Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos alternos internos entre paralelas.

f) Observan el dibujo y responden: ¿Qué ángulo de giro realiza cada una de las personas mostradas en el dibujo si caminan por las mismas calles anteriores, pero siguiendo la trayectoria indicada por las flechas?



¿Qué relación existe entre ambos ángulos?, ¿por qué?

¿Esta relación se mantiene si se varía la medida del ángulo de intersección de las calles Copiapó y 21 de mayo con la calle Alameda? (manteniéndose el paralelismo de ambas calles). Por ejemplo, ¿si el ángulo de giro desde Alameda a Copiapó es de 110˚ ó 140˚ ó 70˚ ó 65˚, lo mismo que el ángulo de giro de 21 de Mayo y la Alameda?

¿Se mantiene esta relación si sólo se cambia el ángulo de intersección de la calle Copiapó con Alameda, es decir, si Copiapó y 21 de Mayo **ya no son paralelas**?

- Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos alternos externos entre paralelas.
- Hacen una síntesis de las relaciones de medida que se establecen entre los diferentes ángulos que se forman al cortar dos o más rectas paralelas por una tercera que no es paralela a ellas. Se apoyan en los casos anteriores.
- Hacen un dibujo en el cual se intersecten 2 rectas cualesquiera y comprueban si sucede lo mismo que en los casos presentados.
- Explican por qué la relación entre los ángulos se mantiene, aunque las rectas se muevan y, por lo tanto, las medidas cambien.

COMENTARIO

La actividad se inicia con la experimentación de giros en trayectorias de manera de asociar los giros a la noción de ángulo. Es importante que los alumnos y alumnas experimenten el giro para luego asociar este movimiento con la marca del ángulo que se hace en el dibujo.

La primera parte de la actividad pretende introducir los ángulos que se generan al interceptar dos rectas: suplementarios adyacentes y ángulos opuestos por el vértice. Sólo después que los estudiantes determinen las relaciones entre estos ángulos, se sugiere que el docente señale sus nombres. Realizan lo mismo con los ángulos que se generan al interceptar dos rectas paralelas entre sí con una tercera recta: ángulos correspondientes, alternos externos e internos. En ambos casos el énfasis está dado por las relaciones de posición y de medida que se establecen entre ellos, más que en los nombres.

Es importante que los estudiantes verifiquen que las conclusiones que se establecen en relación con las medidas de los ángulos que se forman entre un par de rectas paralelas cortadas por una transversal no se cumplen cuando las rectas **no son paralelas.**

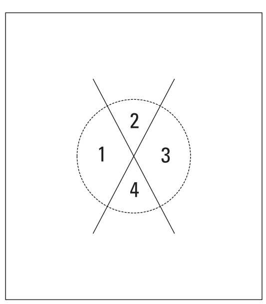
2. Observan las figuras que se forman entre las rectas dadas, presentadas en la hoja A y B. Responden las preguntas que se presentan a continuación y anticipan los efectos de mover las rectas.

a) Miden los ángulos de las figuras formadas en cada hoja, destacan con color los ángulos congruentes.

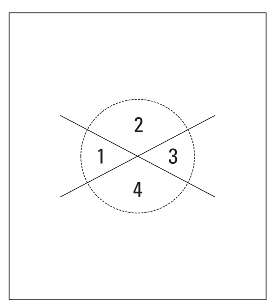
Tanto en las figuras de la hoja A como B ¿cuánto suman los 2 ángulos que están sobre la misma recta, por ejemplo $\sphericalangle$ 1 y $\sphericalangle$ 2? (buscar las diferentes parejas de ángulos que están sobre una recta).

- Si se movieran las rectas, ¿qué pasaría con los ángulos que antes eran congruentes?, ¿qué pasaría con los ángulos que antes sumaban 180˚?
- Hacen un dibujo en el cual se intersecten 2 rectas cualesquiera y comprueban si sucede lo mismo que en los casos presentados.

Explican por qué la relación entre los ángulos se mantiene, aunque las rectas se muevan y, por lo tanto, las medidas cambien.



Hoja A

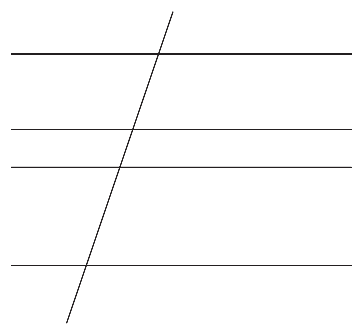


Hoja B

COMENTARIO

En esta primera parte se busca focalizar sobre los ángulos opuestos por el vértice y los adyacentes. El interés es que los estudiantes establezcan las relaciones de medidas entre ellos: es decir, que no importando las medidas, los primeros siempre van a ser congruentes y los otros siempre sumarán 180˚. Este es un momento adecuado para mencionar a sus alumnos y alumnas el nombre que reciben estos ángulos, con el objetivo de facilitar la comunicación y evitar ambigüedades.

b) Describen el siguiente dibujo, considerando las rectas y los ángulos que se forman. Miden lo que sea necesario (longitud de segmentos o medida de ángulos) de manera de responder fundadamente.



- Marcan de color los ángulos congruentes y tratan de explicar la relación entre ellos. Para la explicación recurren al desplazamiento de las figuras y a la medida de los ángulos.

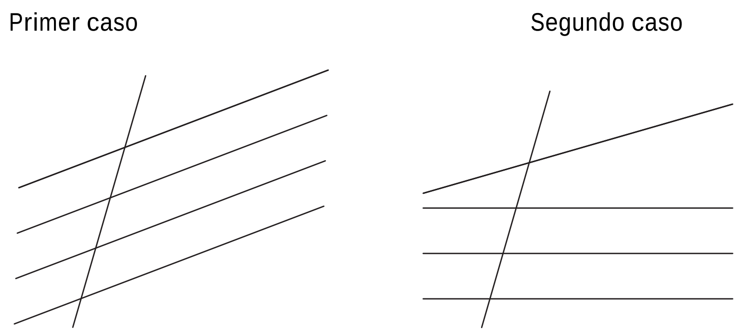
COMENTARIO

Las conclusiones que se obtienen respecto a la relación entre los ángulos, a través de las mediciones realizadas, también se pueden verificar por medio de desplazamiento de rectas y rotaciones de ángulos. Es importante destacar que cuando el razonamiento permite establecer claramente la relación entre ángulos no es necesario medir.

Una vez realizadas estas constataciones se sugiere presentar el teorema acerca de las paralelas.

- Predicen lo que puede suceder si mueven las figuras realizadas anteriormente. El movimiento puede ser de dos tipos: en el primer caso, mueven en bloque las paralelas, pero no así la recta transversal.

  En el segundo caso sólo modifican una de las rectas paralelas y predicen qué sucederá con las figuras y sus ángulos. Comprueban las predicciones simulando el movimiento deseado, ya sea en la computadora o usando varillas articuladas.



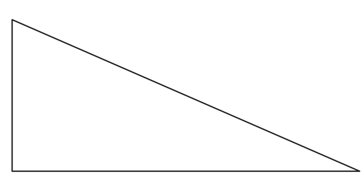
COMENTARIO

Es muy importante comprobar que al mover las rectas en forma paralela se mantiene la relación entre los ángulos; en cambio, al modificar la condición de paralelismo entre las rectas, la igualdad de medida de los ángulos se modifica. Un programa computacional como el Cabri geométrico puede ser de gran utilidad para comprobar estas propiedades.

3. Resuelven cada uno de los siguientes desafíos:

a) Si se desea dibujar, dentro de un triángulo, otro triángulo más pequeño cuyos ángulos interiores sean de igual medida que el primero, ¿cómo se podría realizar? Escriben los pasos para hacerlo. Pueden usar transportador, regla, escuadra y compás.

Se puede tomar como ejemplo este triángulo y dibujar uno al interior.



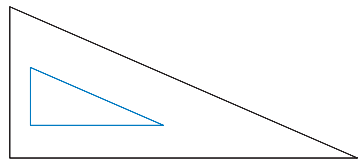
COMENTARIO

El año anterior los estudiantes dibujaron con regla y compás triángulos dadas diferentes condiciones y además copiaron ángulos usando compás y regla. Esto les posibilitaría solucionar el problema.

Una solución al desafío puede ser trazar un segmento paralelo a uno de los lados y sobre él copiar el ángulo correspondiente. El ángulo se puede copiar con el transportador o sólo usando el compás. Otro procedimiento es trazar rectas paralelas a los tres lados del triángulo y pedir a los alumnos y alumnas verificar que ambos triángulos tienen los mismos ángulos. Es importante hacer reflexionar a los estudiantes sobre la utilidad de usar sólo el compás y sobre la relación entre éste y el otro procedimiento que utiliza sólo el dibujo de paralelas y que se aborda en las preguntas a continuación.

Llevar a reflexionar a los alumnos y alumnas en torno al procedimiento con preguntas como:

- ¿Qué pasaría si el procedimiento utilizado fuese sólo trazando las paralelas a cada lado sin importar la distancia a la cual quedan del lado original?
- ¿El triángulo interior tendría los ángulos interiores de la misma medida? Ver dibujo.



Se sugiere confirmar estas respuestas a través de construcciones y centrar el análisis sobre los segmentos paralelos y su relación con la congruencia de ángulos.

- Dibujan un segundo triángulo por fuera del triángulo inicial y establecen una forma general de dibujar una figura más pequeña o más grande cuyos ángulos sean congruentes.

COMENTARIO

En este punto se sugiere presentar en forma más explícita las relaciones de congruencia y de suplementariedad entre los ángulos que se generan entre las rectas paralelas cortadas por una transversal.

b) Toman el mismo triángulo anterior y se les propone dibujar con lápiz y regla o bien con la computadora una hoja en la cual sólo aparezcan triángulos congruentes a éste de manera que los triángulos compartan un lado y/o un vértice y así no exista espacio entre cada figura.

Cada alumna o alumno debe decidir cómo los dibujará y los pasos a seguir.

COMENTARIO

El programa computacional Cabri geométrico permite realizar este tipo de actividades. También con el programa Word, usando la barra de herramientas de dibujo, se pueden dibujar una infinidad de formas, ya sea partiendo de segmentos que al intersectarlos formen polígonos (figura 1) o a partir de las “autoformas” (figura 2), las cuales al girarlas convenientemente pueden tapizar el plano. Poner atención en que en este punto el centro de la actividad son las paralelas: por lo tanto, es importante destacarlas con color en ambos casos de construcción.

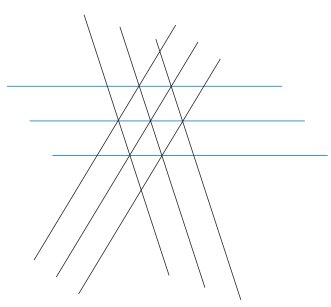


Figura 1

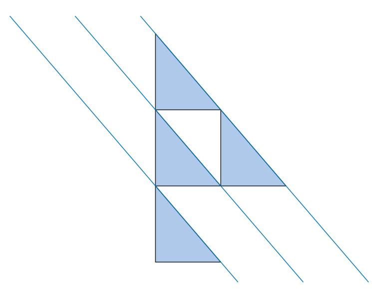


Figura 2

- Comparten algunos procedimientos usados en el dibujo. Miden los ángulos interiores del triángulo e identifican con color dónde se ubican los congruentes a ellos.
- Observan las rectas paralelas que se forman. Al medir los ángulos y observar las rectas paralelas confirman que se cumplen las relaciones angulares en los ángulos que se generan entre las rectas paralelas cortadas por una transversal. Establecen como un procedimiento útil y fácil para lograr la repetición de los triángulos el trazado de las rectas paralelas a partir de los puntos de intersección de los vértices.
- Al observar las medidas de los ángulos, establecen que siempre en las intersecciones de rectas hay sólo dos medidas que se repiten. Llaman a estos ángulos: opuestos por el vértice.

  Además observan que la suma de los ángulos que se ubican sobre una misma recta es 180° y los llaman ángulos adyacentes suplementarios.

COMENTARIO

Una vez caracterizados los ángulos opuestos por el vértice y los adyacentes suplementarios, se sugiere que los estudiantes los observen en otros rompecabezas o en cualquier dibujo con intersección de segmentos y confirmen la relación entre la medida de estos ángulos (congruentes o suplementarios, según corresponda).

Actividad 2

Resuelven variados problemas relacionados con ángulos en figuras formadas entre rectas de manera de:

- **explicar y justificar cómo se conoce el valor de determinados ángulos basándose en las relaciones entre las rectas;**
- **establecer relaciones entre los ángulos interiores de paralelogramos y trapecios.**

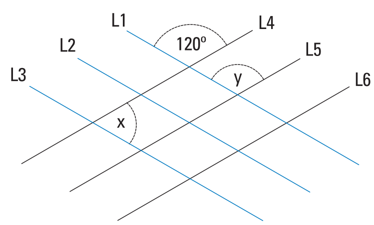
Ejemplos

1. Resuelven la situación planteada en cada caso. Algunas alumnas o alumnos presentan sus soluciones al curso. Las analizan y discuten.

a) Encuentran el valor de los ángulos pedidos. Explican en cuáles relaciones entre los ángulos basan su razonamiento para justificar su respuesta.

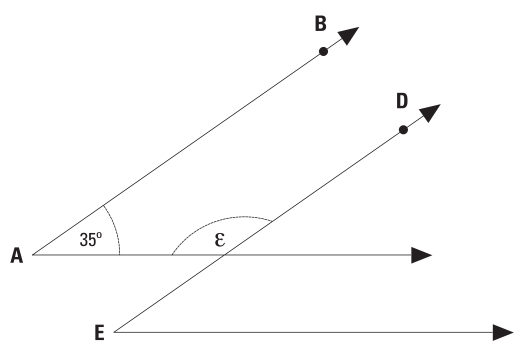
- ¿Cuál es la medida de los ángulos *x* e *y*? Fundamentan.

  Datos: L1//L2//L3 y L4//L5//L6



- ¿Cuánto mide el ∢ ε ? Fundamentan. ¿Cuáles otras medidas de ángulos puedes encontrar con la información dada?

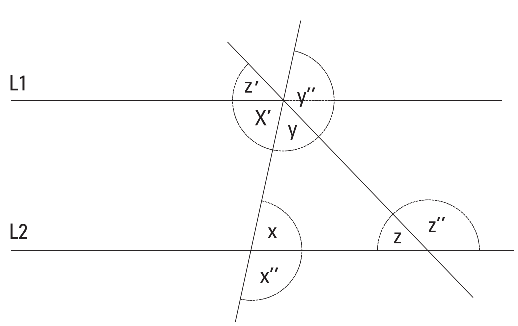
  Datos: AB // ED



b) Explican:

- Por qué ∢ x con ∢ x' son congruentes y por qué ∢ z con ∢ z' también lo son entre sí.
- Por qué x + y + z = 180°
- Por qué x´´ + y´´ +z´´ = 360°
- ¿Cómo se relacionan los resultados anteriores con la suma de ángulos interiores y exteriores de un triángulo?

Dato: L1 // L2



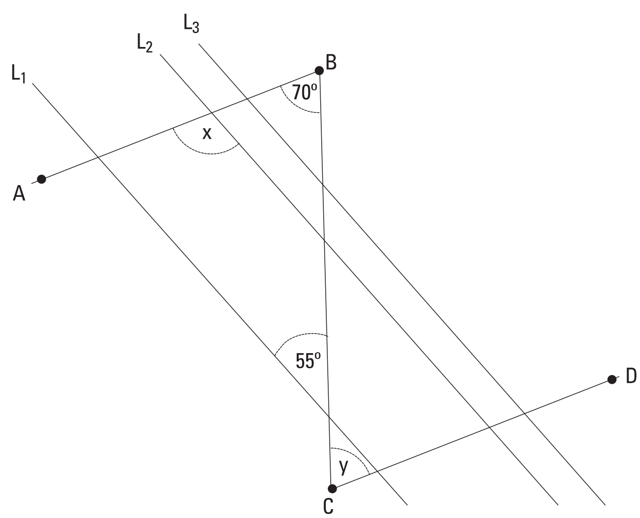
COMENTARIO

El análisis del ejercicio anterior entrega los antecedentes necesarios para que el docente presente la demostración del teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, tema que fue abordado el año anterior a raíz de la construcción de triángulos. En este nivel se retoma, profundizando en la argumentación que entrega una demostración.

2. Resuelven la situación planteada en cada caso. Algunas alumnas o alumnos presentan sus soluciones al curso. Las analizan y discuten.

a) Encuentran el valor de los ángulos pedidos. Explican en cuáles relaciones entre los ángulos basan su razonamiento, justificando la respuesta. ¿Cuánto miden el ángulo *x* y el ángulo *y*?

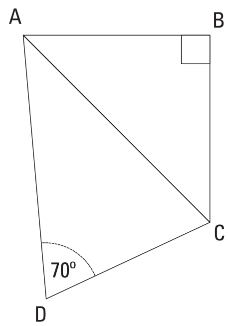
Datos: AB // CD y L1 // L2 // L3



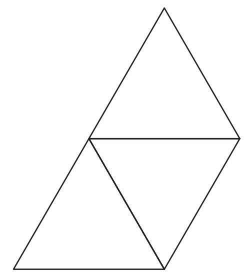
b) Observan las figuras siguientes y los datos presentados. Indican si hay **segmentos paralelos.** Fundamentan su respuesta explicando por qué.

Para justificar la respuesta usan lenguaje claro, preciso y se basan en las relaciones entre los ángulos y las medidas entregadas. No miden los ángulos con transportador.

La figura está formada por dos triángulos isósceles, de manera que los segmentos AB y BC son congruentes y los segmentos AC y AD también lo son.



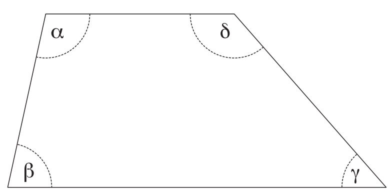
La figura está formada por tres triángulos equiláteros.

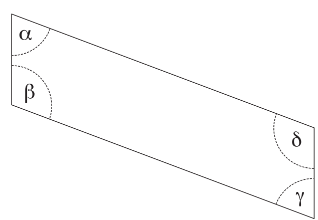


COMENTARIO

Es importante que los estudiantes establezcan que conociendo las medidas en un dibujo también es posible determinar la presencia o ausencia de segmentos y/o rectas paralelas. En el primer caso logran saber que no hay y en el segundo que sí los hay y cuáles son.

c) Utilizando los conocimientos sobre los ángulos entre paralelas (sin medir los ángulos) fundamentan las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los paralelogramos y trapecios.





En el paralelogramo:

- ¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos α y β?, ¿y entre las medidas de los ángulos δ y γ?, ¿se cumplen estas relaciones en el trapecio?
- ¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos α y δ?, ¿y entre las medidas de los ángulos β y γ?, ¿se cumplen estas relaciones en el trapecio?

Actividad 3

Investigan sobre la suma de ángulos interiores de polígonos y establecen una fórmula que les permita conocer la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono. Caracterizan los polígonos regulares.

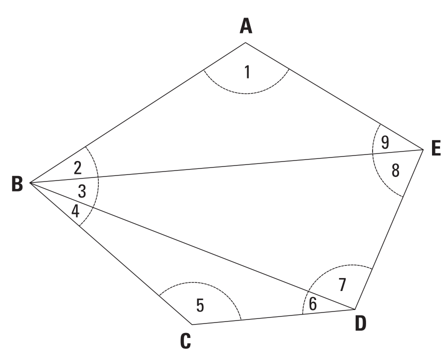
Ejemplo

a) Dibujan un polígono convexo cualquiera y trazan desde un vértice cualquiera todas las diagonales posibles de obtener, de manera que el polígono quede subdividido en varios triángulos.

Marcan los ángulos interiores de cada triángulo y confirman que con todos estos ángulos se pueden obtener los ángulos interiores del polígono.

COMENTARIO

Esta es una forma de subdividir un pentágono. Preguntar a los alumnos y alumnas si existen otras maneras de subdividirlo bajo las mismas condiciones, de modo de concluir que no importando el vértice del cual puedan trazar las diagonales, de todas maneras se forman triángulos.



Para confirmar que los ángulos interiores de todos los triángulos corresponden a la suma de los ángulos interiores del polígono, basta con observar el polígono: en el dibujo, ∢ 2 más ∢ 3 más ∢ 4 obviamente forman el ∢ ABC y, así, con cada uno de los ángulos del polígono.

b) Repiten lo anterior partiendo de un polígono de 3 lados y aumentando sucesivamente 1 lado del polígono hasta que se tengan suficientes casos como para establecer conclusiones.

Completan una tabla ordenadamente, de manera de relacionar la cantidad de triángulos en los que se divide cada polígono con la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono.

Polígono	Nº de lados	Nº de triángulos en los que se subdividió	Suma de los ángulos interiores del polígono
Triángulo	3	1	
Cuadrilátero	4	2	
Pentágono	5	3	

- Orientados por algunas preguntas respecto de la tabla, establecen conclusiones respecto de la suma de los ángulos interiores de un polígono.
- Si observan las columnas referidas al N° de lados del polígono y el N° de triángulos obtenidos al trazar las diagonales desde un mismo vértice:
  - ¿Qué relación numérica existe entre los números de ambas columnas?
  - Si el polígono tiene un número cualquiera de lados, que lo podemos expresar con la letra “n”, ¿qué expresión representaría el número de triángulos que se forman en ese polígono de *n* lados?, ¿por qué?

COMENTARIO

La suma total de la medida de los ángulos interiores de cada polígono se establece claramente al relacionar la suma de los ángulos interiores de un triángulo (180°) con los ángulos interiores del polígono. Se espera que con ayuda del docente se vaya concluyendo una “fórmula” para obtener de modo general la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera. En el primer momento se concluye que el número de triángulos formados corresponde a “*n*-2” si *n* es el número de lados del polígono. Además, deben buscar la explicación de por qué se restan 2. Si los estudiantes observan que no se pueden obtener diagonales uniendo los vértices contiguos, entonces comprenderán por qué cada vez que se trazan las diagonales de un vértice “se pierden” 2 vértices. Otras preguntas que se pueden plantear respecto a los datos de la tabla son:

Si observan las columnas referidas al número de triángulos del polígono y la suma total de los ángulos interiores del polígono:

- ¿Cómo se puede escribir la relación numérica que existe entre los números de ambas columnas?
- Si el polígono de “*n*” lados, se ha subdividido en “*n*-2” triángulos, ¿qué expresión representaría la suma de los ángulos interiores del polígono?

En este punto, se espera que observen que si el número obtenido anteriormente (que corresponde al número de triángulos) se multiplica por 180 se obtiene la suma de los ángulos interiores de cada polígono. Es decir, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es: **(n-2) • 180**°, donde *n* representa el número de lados del polígono.

c) Ponen a prueba la fórmula encontrada con otros polígonos y observan cómo a medida que aumenta el número de lados del polígono también aumenta la suma total de la medida de sus ángulos interiores. Discuten sobre si ocurre el mismo efecto con la suma de los ángulos exteriores del polígono convexo.

COMENTARIO

Esta discusión puede desencadenar otra investigación que puede realizarse con casos concretos, midiendo los ángulos exteriores de los polígonos. Es importante llegar a concluir que mientras la suma de ángulos interiores de un polígono crece a medida que crece el número de lados, la suma de ángulos exteriores es siempre 360˚.

d) Analizan algunos polígonos conocidos que tienen sus lados iguales y sus ángulos de igual medida. A partir de las características del triángulo equilátero y el cuadrado, establecen que estos polígonos, al cumplir con las condiciones de tener ángulos de igual medida, también tienen lados de igual medida, y que reciben el nombre de polígonos regulares. Determinan, considerando estas características, cuáles serían otros polígonos regulares.

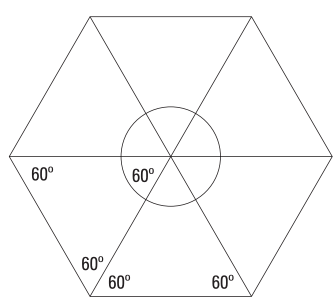
- Se desafía a los alumnos y alumnas a construir con regla, compás y transportador algunos polígonos regulares.

COMENTARIO

Hasta el momento los estudiantes tienen una gama de conocimientos, tanto numéricos como geométricos, que les permitirían fácilmente abordar este desafío. Por ejemplo, se pueden basar en la descomposición de los polígonos regulares en triángulos congruentes u otras figuras (actividades de composición y descomposición con triángulos que han realizado en 6º Año Básico). También conocen la medida de cada ángulo interior de estos polígonos y saben construir con regla, compás y transportador cualquier tipo de triángulo. Incentivar a los alumnos y alumnas a investigar cómo pueden realizar esta construcción y a observar cómo en las distintas soluciones al problema se ponen en juego diferentes características de los polígonos regulares.

La idea es que, al revés de lo que hicieron en la actividad anterior, es decir, descomponer un polígono cualquiera en triángulos (partiendo desde un vértice), ahora compongan el polígono regular.

Una posibilidad es usar triángulos congruentes uniéndolos en un vértice común (central), tal como indica la figura.



En este caso se muestra el hexágono formado con los seis triángulos equiláteros. Lo interesante es relacionar lo que investigaron anteriormente de los ángulos interiores con la construcción. Entonces, si obtuvieron que la medida de un ángulo interior en el hexágono regular es 120°, entonces cada triángulo interior, como es congruente con los otros seis, tiene como única posibilidad que sus medidas sean de 60˚, ya que en cada vértice sumarían 120˚ y en el centro del polígono, donde se unen los vértices, sumarían 360˚, lo que es la circunferencia completa.

Se sugiere que los alumnos y alumnas construyan al menos hasta el octágono, saltándose el heptágono.

- ¿Qué sucede en el caso del polígono regular de siete lados? ¿Se puede construir exactamente con transportador la medida del ángulo interior?

e) Superponen los polígonos regulares construidos e imaginan qué formas van tomando los polígonos regulares de una mayor cantidad de lados. ¿Llegará un momento en el cual aparezca una circunferencia?, ¿por qué?, ¿cómo va aumentando la medida de cada ángulo interior de los polígonos?

Entonces, ¿podría considerarse la circunferencia como un polígono? Explican.

COMENTARIO

Construir los polígonos regulares con un programa geométrico como el Cabri o Geómetra permite visualizar claramente el efecto de aumentar los lados y su cercanía con la circunferencia.

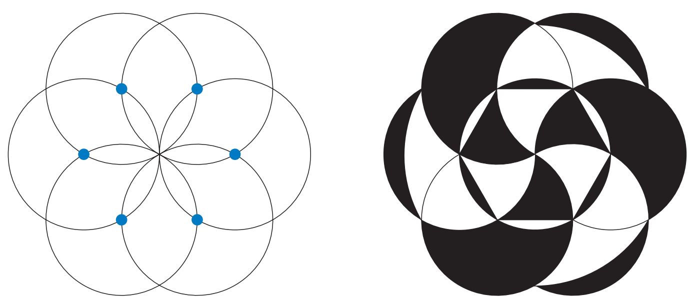
Actividad 4

Construyen circunferencias con determinadas condiciones iniciales. Analizan sus procedimientos e identifican el centro y radio como los elementos esenciales que las determinan.

Ejemplos

1. Realizan diferentes procedimientos para reproducir figuras compuestas por circunferencias, utilizando instrumentos geométricos. Comparten los procedimientos con sus compañeras y compañeros.

a) Copian en forma exacta cada uno de los siguientes dibujos sin calcarlos y sólo utilizando regla y compás.



COMENTARIO

A través de la copia de cada dibujo surge la importancia del centro de la circunferencia; se sugiere introducir el radio y el diámetro como elementos caracterizadores de ella.

Dibujar ayuda a detenerse y reflexionar sobre las propiedades de las figuras geométricas y permite corregir el trabajo realizado.

b) Se desea marcar con tiza la circunferencia que va al centro de la cancha de básquetbol. ¿Cómo lo puede realizar la persona que marca la cancha si no tiene un compás gigante?

Explican el procedimiento y lo fundamentan en las características de la circunferencia que permiten tener plena seguridad que lo dibujado será lo requerido.

COMENTARIO

La idea es que determinen el centro de la circunferencia y luego la marquen utilizando una cuerda.

2. Confeccionan en papel figuras compuestas por círculos.

a) Planean cómo hacer un reloj, teniendo como base un plato. Determinan el centro para ubicar el minutero y segundero.

b) Investigan con adultos, por ejemplo, un carpintero o un marcador de canchas o artesanos, para qué utilizan el diseño de circunferencias. ¿Cómo las dibujan? ¿Cómo determinan el centro de ellas, si no lo tienen? ¿Cómo habrían solucionado ellos, por ejemplo, el trazado de una pieza redonda o el diseño de una mesa redonda?

COMENTARIO

El trabajo con papel es muy interesante pues permite establecer por plegado el centro de la circunferencia y queda claramente establecido que el diámetro es eje de simetría de la misma, además de comprobar que todos los pliegues que coinciden con el diámetro son de igual longitud.

Actividad 5

A partir de situaciones asocian el perímetro de una circunferencia a la medida del contorno y del área como medida de la superficie de la misma. Hacen estimaciones. Analizan la dificultad que involucra la medición.

Ejemplo

Reflexionan sobre situaciones referidas a perímetros y áreas.

a) Se están confeccionando manteles y centros de mesa en forma de círculo. Cada uno lleva cinta en el borde.

   Se desea saber en la forma más precisa posible cuántos metros de cinta y género se requieren para cada uno.

   Los diámetros son: centro de mesa 40 cm y mantel 1,20 m

b) Trazan modelos de posa vasos de forma circular que tengan de diámetro 10 cm y 11 cm. Buscan formas de calcular la superficie que cubre cada uno. Se pueden apoyar en cuadriculados de 1 cm de lado o en papel milimetrado.

c) Distribuidos en grupos, hacen un molde en papel para posa vasos y buscan formas de medir el contorno y la superficie de cada uno.

- Asocian la medida del contorno con el perímetro de la circunferencia y la de superficie con el área de la misma.

- Presentan algunos procedimientos usados en esta medición y comparan las medidas. Comentan la dificultad para obtenerla, las diferencias entre las medidas presentadas y reflexionan sobre las posibles causas. Ubican el valor de la medida entre ciertos rangos.

d) Buscan otras situaciones en las cuales es útil o necesario conocer el perímetro y el área de circunferencias.

- Investigan sobre el significado de los números referidos a las medidas de los cuellos de las camisas de hombres, los anillos para los dedos, las llantas y neumáticos. Conversan sobre su relación con lo que saben de la circunferencia.

COMENTARIO

En la primera parte de la actividad la idea es que los estudiantes recurran a procedimientos de medición como ubicar una cuerda por el contorno de la circunferencia y, en el caso del área, cuadricular la superficie con cuadrados de distintas medida para ajustar el cálculo. En este segundo caso es importante que se den cuenta que cuanto más pequeño es el cuadriculado, más exacta es la medición. Esto ayuda a afianzar la asociación del perímetro como una sola dimensión y del área como el cálculo con dos dimensiones.

La reflexión en torno a la dificultad para encontrar un valor exacto de la medida está centrada en darse cuenta que es una medida con cifras decimales infinitas y aunque se visualiza perfectamente (se ve en el trozo de cuerda) no se puede expresar a través de un número decimal, sino que representa un número irracional.

Actividad 6

Investigan la relación entre el perímetro, el radio y el diámetro de una circunferencia a través del cuociente. Definen el número pi (π).

Ejemplo

Conversan sobre el uso de las ruedas métricas para medir distancias, cómo funcionan, cuál es su utilidad. Luego cada grupo construye con cartón ruedas que pueden ser de 20 cm de diámetro, de 30 cm y 40 cm.

a) Determinan cuánto alcanza a recorrer cada una de las ruedas métricas en 1 vuelta, presentan la información al curso y completan una tabla con la información. Redondean el valor obtenido en cada medición.

b) Analizan la tabla buscando un patrón numérico entre los números de cada columna y fila. Luego se centran en las filas, calculan en cada caso el cuociente entre el perímetro y el diámetro.

c) Realizan el mismo procedimiento para circunferencias de diámetro 10 cm; 5 cm, 1 cm. Antes de hacer las mediciones hacen conjeturas respecto de los valores que obtendrán. Luego comprueban sus conjeturas haciendo las mediciones y analizan los aciertos y los errores. Completan la tabla con esta nueva información.

d) Investigan en diferentes fuentes disponibles en la escuela sobre el origen del número π, su historia e importancia. Ponen en común esta información.

e) Retoman la tabla anterior y agregan otras columnas: en una expresan el perímetro de la circunferencia sin realizar el cálculo y usando la notación π y en las otras rehacen el cálculo con calculadora estableciendo un valor para π. Conversan sobre la conveniencia de usar una u otra forma.

f) Establecen una forma general de obtener el perímetro de cualquier circunferencia si se conoce su diámetro o radio. Se orientan con preguntas como:

- ¿Qué elemento de la circunferencia se multiplica por π para establecer el perímetro de la circunferencia?
- Escribir una fórmula general para obtenerlo, escribiendo el símbolo de π.
- ¿Qué sucede si no se conoce el radio? Escribir la fórmula en este caso.

COMENTARIO

A continuación se presenta un ejemplo de una tabla y los posibles valores obtenidos después del redondeo.

Ruedas	**Distancia que recorre en 1 vuelta**	**Diámetro de la rueda**	**Cuociente**
1º	62	20 cm	3,1
2º	93	30 cm	3,1
3º	124	40 cm	3,1

Si analizan las filas se darán cuenta que la relación entre el diámetro de la rueda y lo que ella recorre es aproximadamente 3 veces mayor.

La presencia de este número surge después de este análisis y de la experiencia obtenida en la actividad anterior en cuanto a su inexactitud.

Es interesante que los alumnos y alumnas investiguen y analicen las diferentes aproximaciones útiles para hacer cálculos con el número π, como son: 3; 3,14; $3\frac{1}{7}$; 3,1416; 3,14159265358979. Obviamente, en muchas ocasiones lo más exacto y conveniente es expresar los resultados en función de π, en otras es usar una aproximación adecuada a la situación.

Existen direcciones en internet dedicadas a este número como www.pi.com y otras. En algunas se podrá encontrar la historia respecto a este número y cómo se llegó a darle un nombre específico. De especial interés en la información histórica son los métodos utilizados a través del tiempo para constatar su existencia y para encontrar aproximaciones de él.

Probablemente la fórmula que se obtenga para calcular el prímetro sea: $\mathbf{d}\pi$ (diámetro por π); presentar, entonces, la otra en torno al radio ($2\ \pi\ \mathbf{r}$) y pedir que expliquen y verifiquen la validez de la igualdad.

g) Modificando la fórmula obtenida responden: ¿Qué diámetro tendría la circunferencia si se quiere que una vuelta de la rueda avance un metro? ¿De qué radio escogerías construir una rueda métrica de manera que sea eficiente para medir distancias en una parcela y sea de fácil lectura la cantidad de metros que vas midiendo?

Actividad 7

Establecen la relación entre el área de la circunferencia y el área de polígonos regulares inscritos o circunscritos en ella. Establecen la relación entre el área y los elementos básicos de la circunferencia.

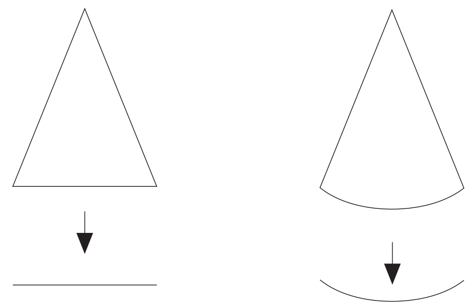
Ejemplos

1. La pregunta que orienta la actividad es: ¿Cómo se puede obtener el área de una circunferencia?

- ¿Es posible relacionarla con el área de alguna figura conocida? ¿Es posible relacionarla con el área de un polígono regular de muchos lados? ¿Cómo? Hacen un dibujo esquemático de la circunferencia y en su interior un polígono de muchos lados.

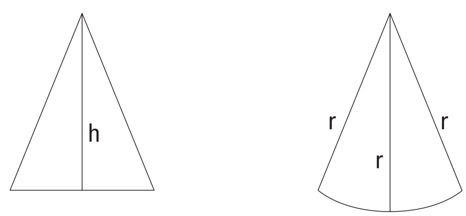
  Para orientar esta pequeña investigación se sugiere partir con los siguientes supuestos básicos, que se desprenden de imaginar la circunferencia como un polígono de infinitos lados:

Al descomponer la circunferencia en triángulos muy pequeños con un vértice común, es posible obtener las siguientes igualdades:



Ambas figuras tendrían igual área (imaginarse triángulos muy pequeños).

Ambas líneas tendrían igual longitud.



Ambas figuras tendrían la altura de igual longitud, entonces h=r.

- ¿Cómo se obtiene el área de un polígono regular?, ¿cómo obtener el área de una circunferencia? Se orientan por una secuencia como la siguiente para abordar la respuesta de la pregunta:

a) Descomponen cualquier polígono regular en triángulos de igual forma y medida, y establecen una fórmula general que permita con este procedimiento calcular el área de polígonos de este tipo. Descomponen en triángulos, partiendo del centro del polígono regular. Indican los datos que deben conocer para calcular y confirman en cada una de las figuras que sean los mismos datos que necesitan conocer de cada polígono. Establecen una fórmula general en función del perímetro de cada polígono.

b) Relacionan la fórmula general obtenida para un polígono regular con el círculo. Orientados por preguntas como las siguientes, deducen una fórmula general para obtener el área de una circunferencia:

  - Si la circunferencia, como ya se había visto, puede ser un polígono de infinitos lados, imaginen y tracen un dibujo esquemático de una circunferencia descompuesta a partir de su centro en triángulos muy pequeños, todos de igual forma y tamaño.

- ¿Qué datos respecto de la circunferencia es necesario conocer para obtener su área? Aplican la fórmula que ya conocen del área de un polígono regular, tomando como referencia los supuestos iniciales, respecto a la igualdad de las figuras cuando el polígono tiene infinitos lados.
- ¿Cuál elemento de la circunferencia se puede asociar a la altura de cada uno de estos infinitos triángulos?
- ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia?

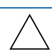
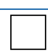
c) Aplican la fórmula para el cálculo del área de diferentes círculos si conocen el radio o el diámetro.

COMENTARIO

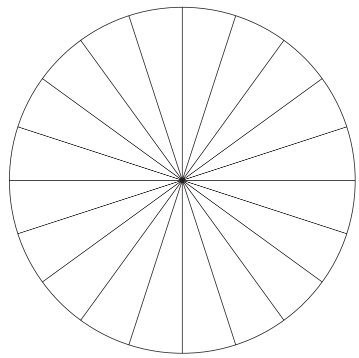
En la actividad 3 de esta misma unidad han descompuesto en triángulos congruentes cada polígono regular. Es conveniente que puedan asumir en grupo el desafío y si en un principio no se obtiene la fórmula, a través del análisis de lo que ellos admiten como pasos necesarios para obtener el área, se oriente con preguntas convenientes. La verbalización puede ayudar: Por ejemplo: “el área del pentágono regular se obtiene de la suma de las áreas de los cinco triángulos”.

Si conocemos la fórmula para el área de 1 triángulo, entonces es posible conocer el área de cinco triángulos equivalentes, y si los 5 lados que son bases de los triángulos es lo mismo que el perímetro, entonces es posible obtener el perímetro del pentágono.

Una tabla como la siguiente puede ayudar a ordenar y resumir la información para así obtener una fórmula general.

Polígono regular	**Datos necesarios**	**Fórmula**
	b y h del triángulo	$\frac{b \bullet h}{2}$
	b y h del cuadrado	$b \bullet h$
	lado o base del polígono y h del triángulo	$5\left(\frac{b \bullet h}{2}\right) = \frac{P \bullet h}{2}$

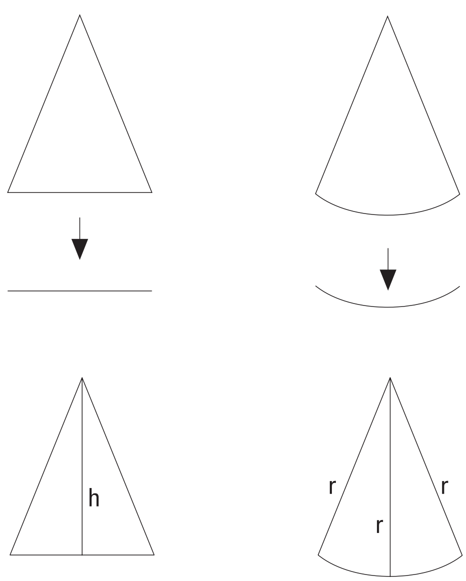
En la segunda parte de la actividad, en la cual se relaciona el área del círculo con la de cualquier polígono regular, es muy importante que realicen el dibujo esquemático que se pide y visualicen que el radio de la circunferencia corresponde a la altura de estos infinitos y angostos triángulos.



Luego es fácil establecer que si aplican la fórmula tendrían: $\frac{P \cdot h}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$, *P* corresponde al perímetro de la circunferencia y *h* es el radio de ésta. Al simplificar se obtiene: $\pi \cdot r^2$ que corresponde al área de la circunferencia.

2. Descomponen una circunferencia en triángulos, parten del centro de la circunferencia, marcan el radio y luego otros radios de manera que se obtengan figuras que se asocien a triángulos isósceles de igual forma y tamaño. Para orientar esta pequeña investigación, partir de los siguientes supuestos básicos, que se desprenden de la circunferencia como un polígono de infinitos lados:

   Al descomponer la cicunferencia en triángulos muy pequeños con un vértice común, es posible obtener las siguientes igualdades:



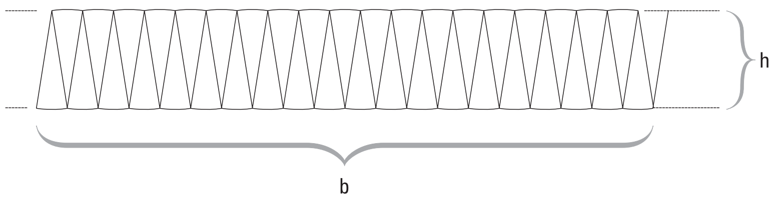
Ambas figuras tendrían igual área.

Ambas líneas tendrían igual longitud.

Ambas figuras tendrían la altura de igual longitud, entonces h=r.

- A partir de dobleces desde el centro obtener un número par de figuras, recortarlas y disponerlas tratando de formar un paralelógramo, como se indica en la figura.

  Si el área de un paralelógramo es b • h, y lo relacionan con los elementos de la circunferencia, entonces:



- ¿A qué corresponde la base? ¿A qué parte del perímetro de la circunferencia?
- ¿A qué elemento de la circunferencia corresponde la altura?
- Escriben la fórmula en función de los elementos de la circunferencia.

COMENTARIO

Se espera que, al igual que en el ejemplo anterior, reemplacen los elementos de la fórmula del paralelógramo por los de la circunferencia. Pedir a sus alumnas y alumnos que lo expresen con palabras y luego realicen la traducción a símbolos.

b • h es lo mismo que la mitad del perímetro de la circunferencia por el radio de la misma, entonces

$b \cdot h = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$

Se sugiere pedir que comparen esta fórmula con la tradicional (πr^2) y establecer conclusiones respecto a la veracidad de la igualdad.

- Aplican la fórmula para el cálculo del área de diferentes círculos si conocen el radio o el diámetro.

Actividad 8

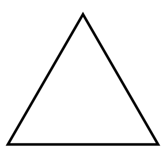
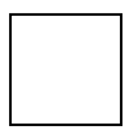
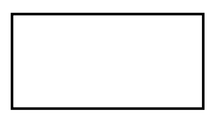
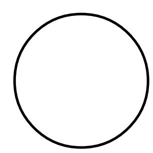
Resuelven problemas en los que se requiera calcular áreas y perímetros de figuras compuestas por circunferencias y otras figuras geométricas; sistematizan y evalúan diferentes estrategias. Calculan los valores del radio de circunferencias, dados el perímetro y/o el área.

Ejemplos

1. En parejas de trabajo, resuelven las siguientes situaciones, evalúan su respuesta y presentan su desarrollo:

a) Un granjero desea hacer un corral para guardar sus animales, y el terreno del cual dispone se presta para construirlo de distintas formas. El analiza las siguientes posibilidades de medidas que se adjuntan, considerando que cuenta con 60 m de alambre. Se trata de saber en cuál se cubre mayor superficie y, por lo mismo, cuál puede albergar mayor cantidad de animales, es decir, en cuál se podría aprovechar mejor la superficie de acuerdo a la forma.

Todas las formas tienen 60 metros de perímetro.

De 20 m en cada lado	**Con lados de 15 m**	**El lado menor de 10 m y el mayor de 20 m**	**De perímetro aproximado a 60 m**
			

- Analizan las posibilidades de cada corral de acuerdo a los criterios entregados y agregan otra posibilidad a la forma del corral.
- Proponen la forma que puede tener el corral y fundamentan su elección.

b) Completan tablas en las cuales dado el radio de una circunferencia encuentran el perímetro y el área de ésta, o al revés, conociendo el área o perímetro encuentran el radio. Expresan los resultados sin calcular (y, cuando corresponda, usan la notación de la raíz y/o usan la calculadora para obtener un valor aproximado).

Completan una tabla como la siguiente:

Radio	Perímetro	Área
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		
5 cm		
6 cm		
10 cm		
12 cm		

- Observan las secuencias que se forman entre los perímetros, las relacionan con los radios correspondientes, establecen el patrón que se genera e intentan anticiparse a otros valores de perímetros, conociendo el radio.
- Observan las secuencias que se forman entre las áreas de los círculos, las relacionan con los radios correspondientes, establecen el patrón que se genera e intentan anticiparse a otros valores de áreas, conociendo el radio.
- Establecen conclusiones que permitan relacionar la variación del radio con el efecto en su perímetro y área. Se orientan por preguntas como las siguientes:
  - Si el radio en una circunferencia se aumenta, ¿cómo aumenta el perímetro correspondiente? ¿Es posible afirmar que la relación entre el radio y el perímetro correspondiente es proporcional?, ¿por qué?
  - Si el radio en una circunferencia se aumenta, ¿cómo aumenta el área correspondiente? ¿Cómo se puede caracterizar el aumento del área del círculo? ¿Es posible afirmar que la relación entre el radio y el área correspondiente es proporcional?, ¿por qué?

COMENTARIO

Al igual que los años anteriores, la completación de las tablas -una vez que se capta el patrón de formación- se puede realizar partiendo de las columnas o las filas. En cada caso el patrón es diferente y guarda relación con la relación entre radio y perímetro y entre radio y área. Es importante observar la tabla en ambos sentidos, hacia abajo (columnas) y hacia el lado (filas).

Poner atención en las unidades de medida, hacer hincapié que en el caso del área la unidad tiene exponente 2, mientras que en el caso del perímetro esto no ocurre.

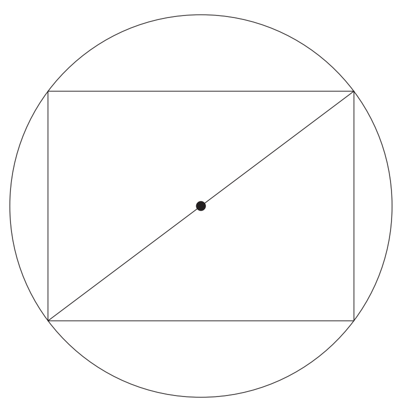
Se recomienda que tomen la tabla anterior ya completa, discutan sobre un procedimiento que permita encontrar el perímetro y el radio de la circunferencia si se conoce el área, reorganicen las columnas comenzando por el área, comprueben el procedimiento propuesto y confirmen la conveniencia de encontrar primero el valor del radio.

También, se puede pedir a los estudiantes que observen la tabla y traten de responder si es posible encontrar el valor del radio y del perímetro de círculos cuyas áreas no sean múltiplos de una potencia al cuadrado, por ejemplo, 2π cm^2, 5π cm^2, 7π cm^2, etc. Discuten sobre sus respuestas y conjeturas. Recuerdan el significado y la notación de las raíces cuadradas abordados en 7° Año Básico, a propósito del teorema de Pitágoras. Pueden usar la calculadora y buscar estos valores expresando el valor de la raíz en forma aproximada y, también, expresando el radio sin calcular la raíz.

c) La Tierra está a una distancia del Sol de 150 millones de km aproximadamente. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es casi circular.

- ¿Qué distancia recorremos “en órbita” alrededor del Sol cada año?
- Para realizar los cálculos, ¿qué valor es conveniente usar para π?, ¿por qué?
- ¿Cuál sería una buena aproximación de la velocidad de la Tierra en su órbita?

d) ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia si el rectángulo está inscrito en la circunferencia cuyo lado mayor mide 12 cm y el menor 9 cm?



COMENTARIO

En 6° Año Básico los alumnos y alumnas compusieron y descompusieron cuadriláteros usando triángulos, estableciendo sus ejes de simetría y estudiando especialmente los paralelógramos. Este trabajo insinuaba las propiedades de las diagonales de éstos. Sin embargo, es posible que no las recuerden, por lo que este problema es la ocasión para hacerlo. También, en este problema vuelve aparecer un tema tratado en 7º Año Básico, el Teorema de Pitágoras.

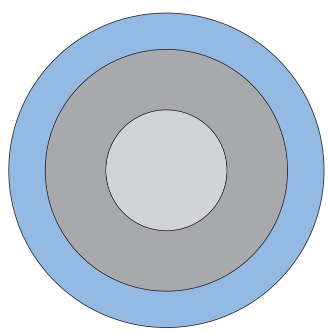
2. En parejas de trabajo, resuelven las siguientes situaciones, evalúan su respuesta y presentan su desarrollo:

a) En el dibujo, no realizado a escala, se presenta un tablero para aficionados de tiro al blanco con 3 zonas de tiro.

   En teoría, si el tablero está bien construido, el jugador debería tener la misma probabilidad de acertar en cada una de las secciones del tablero.

- ¿Cómo se puede saber que efectivamente el diseño da la misma probabilidad de ubicar una plumilla en cada sector? ¿Qué cálculo que involucre el diseño permite esta certeza?
- En el caso que el radio del círculo interior sea 12 cm; ¿cuál debería ser el área de cada anillo?
- Imaginan que cada anillo de color pertenece a un círculo (con igual centro al más pequeño). Si el círculo interior tiene de radio 12 cm, ¿cuál debería ser el área de cada uno de los círculos más grandes, de manera que el diseño del tablero sea el correcto?

  Expresan el área de cada círculo de al menos tres maneras.
- ¿Cuál debería ser el radio de cada uno de los círculos antes señalados? Presentan la respuesta: calculando la raíz con la calculadora y sin calcular la raíz.

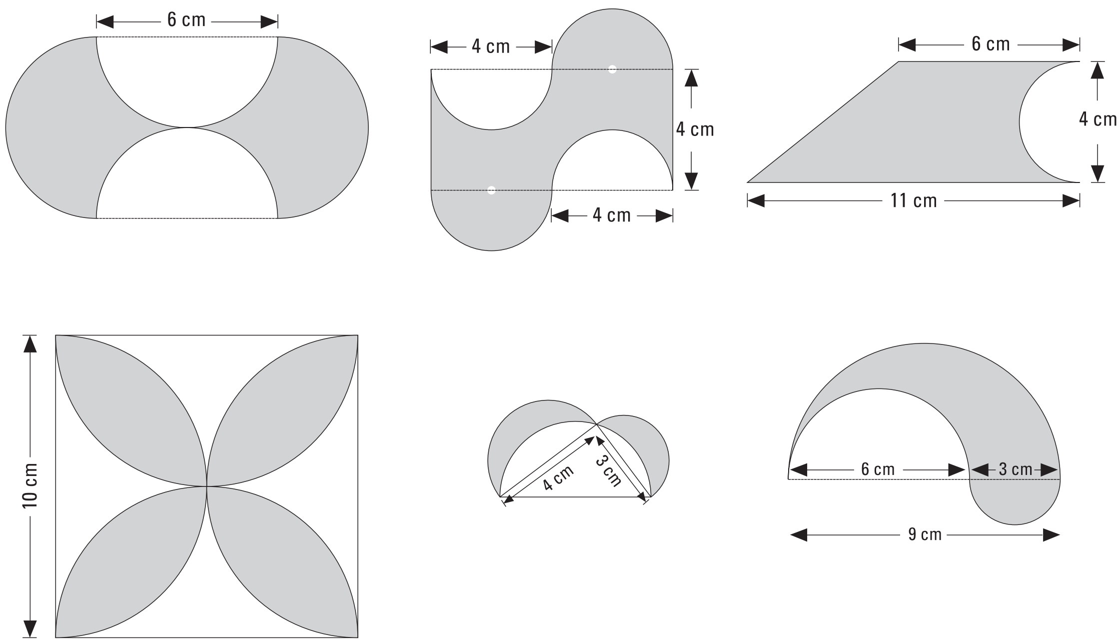


COMENTARIO

Animar a los estudiantes a que algunas de las respuestas respecto del área se presenten sin el cálculo de π y en función del área del primer círculo que es igual a 144π (por ejemplo: $2 \cdot 144\pi$, el área del segundo círculo, y $3 \cdot 144\pi$, el área del círculo mayor). Cuando presenten una aproximación de π, hacerlos reflexionar sobre la más conveniente.

En esta misma actividad, en el Ejemplo 1, se aborda el tema de las raíces. En este problema se sugiere el mismo tratamiento.

b) Calculan el área de la parte sombreada:



COMENTARIO

Se sugiere partir el cálculo del área de estas figuras compuestas, dibujándolas; de esta manera, se realiza el ejercicio de análisis de la figura. Deben establecer a qué parte del círculo corresponde el sector circular que se presenta.

c) Un artesano compró varias piezas de cuero de diferentes tamaños y formas, sin embargo, la mayoría se acerca a una forma rectangular.

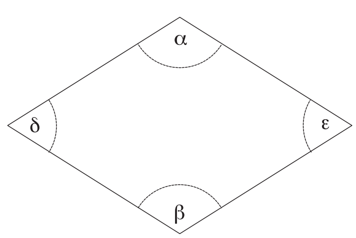
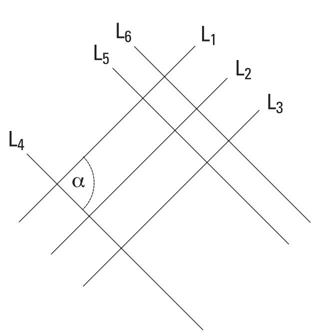
El artesano está realizando en una de las piezas los cortes para las bases de un cubilete de cacho, que se sabe tienen forma circular. El radio de cada pieza es de 3 cm y el tamaño de la pieza es aproximadamente de 1 metro por 80 cm y su valor es de 30 mil pesos.

¿Cómo sería recomendable disponer las bases circulares de manera que se aproveche al máximo la pieza de cuero? Hacen un dibujo esquemático de la distribución y explican por qué es la forma en la cual se aprovecha mejor la pieza. ¿Cuántas bases circulares alcanza a obtener con ella?

¿Cuánto cuero se pierde de la pieza completa? ¿Aproximadamente a cuánto dinero equivale esta pérdida en la pieza de cuero?

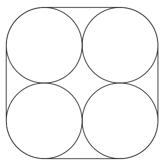
Actividades propuestas para la evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de ellas están diseñadas para ser trabajadas en grupo.
En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observan que:
Encuentran el valor de algunos ángulos pedidos y explican cómo lo obtuvieron refiriéndose a las relaciones entre los ángulos para justificar la respuesta.	
1. La figura muestra un rombo. Explica por qué los ángulos α y β son congruentes y por qué los ángulos α y δ suman 180˚. Para justificarlo puedes prolongar sus lados  	• Usan argumentos basados en el teorema de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal. • Si se apoyan en el dibujo hacen modificaciones pertinentes.
2. En el dibujo $\sphericalangle\alpha = 90˚$; L_1es paralela a L_2 y a L_3 como también son paralelas entre sí L_4, L_5 y L_6 ¿Por qué puedes establecer con seguridad que L_1 es perpendicular a L_5 y L_6?  	• Usan argumentos basados en el teorema de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal. • Identifican en la figura las rectas que se relacionan de manera pertinente con sus argumentos.

Resuelven problemas que impliquen obtener el área y perímetro de diversas figuras.

Cuatro palos redondos de 6 cm de diámetro cada uno se han atado con una cinta de plástico como muestra el dibujo.



¿Cuál es la longitud de la cinta de plástico que ata los palos?

Explica el razonamiento que te permite encontrar la respuesta.

- Establecen relaciones entre los diámetros y las utilizan para encontrar la solución.
- Expresan el resultado de una manera comprensible.

Unidad 2

Relaciones proporcionales

TIEMPO ESTIMADO: 7-9 SEMANAS

Contenidos

Proporcionalidad

- Elaboración de tablas y gráficos correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa mediante un producto constante y un cuociente constante, respectivamente.
- Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes).
- Realización e interpretación de planos esquemáticos a escala.
- Cálculo de porcentajes y elaboración y análisis de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado, utilizando calculadora.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa, para las relaciones y variaciones proporcionales y porcentajes.
- Lectura y análisis de encuestas de opinión en relación con proporciones y porcentajes.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Establecen relaciones entre magnitudes involucradas en problemas diversos y discriminan entre las relaciones proporcionales directas e inversas apoyándose en la representación gráfica.
2. Utilizan diversas estrategias para solucionar problemas que implican variaciones proporcionales de las magnitudes, incluida la representación gráfica.
3. Interpretan gráficos de situaciones diversas e identifican el tipo de relación que se establece entre dos variables relacionándolas con la variación proporcional.
4. Resuelven problemas de proporcionalidad planteados en contextos geométricos y/o numéricos aplicando adecuadamente el cuociente constante o el producto constante según corresponda.
5. Resuelven problemas que implican cálculos sucesivos de porcentajes aplicando propiedades de la multiplicación. Encuentran el referente inicial a partir de una cantidad que incluye un porcentaje (por ejemplo, precio con IVA incluido, encuentran el precio sin IVA).
6. Analizan críticamente información estadística, identifican las fuentes y opinan sobre la representatividad distinguiendo censos de encuestas muestrales.

Orientaciones didácticas

Del mismo modo que en el nivel anterior (NB5), a través de las actividades propuestas en esta unidad se espera que alumnas y alumnos enfrenten, de manera sistemática, situaciones en las cuales existen relaciones entre dos magnitudes (o entre los valores de una misma magnitud), sean éstas proporcionales directas o inversas, o no proporcionales.

Como se señaló en la introducción de este programa, las relaciones proporcionales están presentes ampliamente en situaciones cotidianas y en las ciencias. Al establecer, por ejemplo, valores de una moneda considerando su equivalencia en otra, se está, normalmente, frente a una situación de variación proporcional (directa). Del mismo modo, los cálculos de porcentajes y de variaciones porcentuales apelan al razonamiento proporcional.

Al enfrentar a los alumnos y alumnas al análisis y resolución de situaciones y problemas en los que hay una relación proporcional entre las magnitudes involucradas, anteriormente se hizo énfasis en el uso de tablas de proporcionalidad, en las que se va registrando la información, para ayudarles a identificar la forma en que los valores van variando, a determinar razones y pares de razones iguales. En 8º Año Básico se agrega la lectura, comprensión, interpretación y uso de gráficos tanto para abordar una situación como para resolver un problema y encontrar soluciones.

Como en los años anteriores, se insiste, también, en otorgar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar sus propias estrategias para enfrentar una situación, incorporando paulatinamente, y en la medida que eso sea necesario, algunos procedimientos convencionales. En este sentido, se propone un trabajo muy relacionado con el enfrentar problemas abiertos, que provoquen la necesidad de encontrar soluciones, de aventurarse en la búsqueda de patrones, de soluciones más generales.

El énfasis del trabajo en la unidad está puesto en la determinación de variaciones proporcionales directas o inversas, cuando corresponde, más que en el cálculo de valores de una proporción. Se enfatiza, en consecuencia, una mirada dinámica de las proporciones. En definitiva, se trata de ir desarrollando el razonamiento proporcional más que el aprendizaje de un conjunto de procedimientos preestablecidos (tales como la aplicación mecánica de la regla de tres, por ejemplo). Ello se realiza a partir de un conjunto de actividades que ponen en juego las intuiciones y conocimientos de los estudiantes, que les permiten ir sistematizando procedimientos, observando el comportamiento de las variables y obtener conclusiones. Y es en este contexto donde se introducen los gráficos como herramientas poderosas para enfrentar y resolver problemas.

De este modo, en la unidad se presentan sólo las definiciones fundamentales. Se propone así una abundante y variada cantidad de situaciones que permiten poner en juego diferentes estrategias y formas de análisis, y las herramientas para ello, tales como tablas para registrar información de manera sistemática (ya usadas en NB5) y los gráficos de proporcionalidad que se abordan específicamente en este nivel. Al mismo tiempo se pretende que los alumnos y alumnas caractericen las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes a partir de los cuocientes constantes (directa) o de los productos constantes (inversa).

No obstante, se insiste en que no se trata de entregar a priori definiciones de proporcionalidad sino que de orientar a los alumnos y alumnas hacia la comprensión de las relaciones de proporcionalidad, y a adquirir herramientas poderosas, tanto para distinguir entre diversos tipos de problemas como para resolverlos correctamente.

Aunque ya se comenzó a trabajar en niveles anteriores, en esta unidad se incluyen también los porcentajes. Más allá de calcular porcentajes referidos a ciertas cantidades, se proponen situaciones que permitan analizar aspectos más complejos de éstos como, por ejemplo, obtener el referente inicial cuando se conoce una cantidad final que incluye un cierto porcentaje de aumento o de descuento.

En toda la unidad, a través del conjunto de actividades y ejemplos propuestos, se persigue que los alumnos y alumnas aborden niveles mayores de generalización que en años anteriores, tanto en la formulación de modelos para expresar un determinado problema, como en la generalización de procedimientos de cálculos que implican necesariamente haber comprendido cabalmente las situaciones. Particularmente en el ámbito de problemas diversos referidos a porcentajes se promueve la generalización de procedimientos.

Actividades

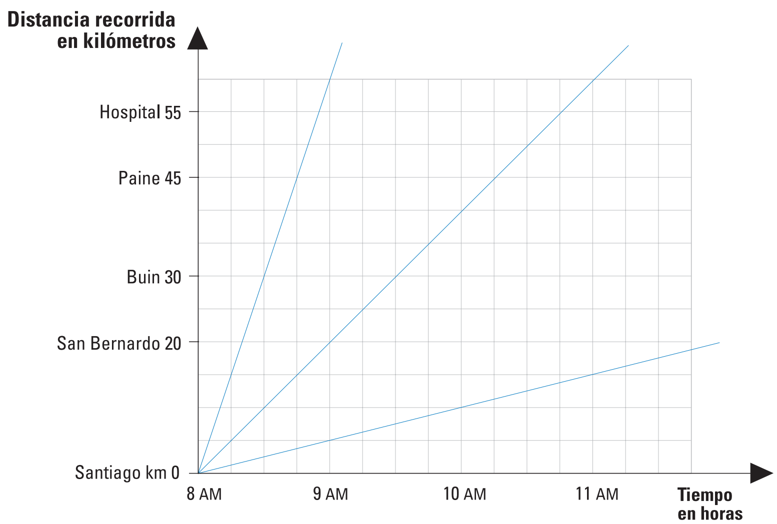
Actividad 1

Leen e interpretan información sobre el comportamiento entre dos variables presentada en gráficos. Determinan estrategias para encontrar informaciones no explicitadas en el gráfico y las evalúan en función de su pertinencia.

Ejemplo

A partir del análisis del siguiente gráfico de una situación simulada, resuelven los problemas propuestos.

a) Un peatón, un ciclista y un automovilista salen desde Santiago hacia el sur a las 8 AM. En el siguiente gráfico se han representado sus movimientos:



- ¿Cuál de las rectas representa al ciclista? ¿Cuál al peatón? ¿Cuál es la del automovilista?

  ¿A qué hora está cada uno en la mitad del camino entre Santiago y Hospital?

  Si todos llegaran a Rancagua, ¿a qué hora lo haría cada uno considerando que deben recorrer una distancia de 80 km y mantienen, cada uno, una velocidad constante?

  Discuten los procedimientos empleados para encontrar las respuestas adecuadas.

- Considerando, hipotéticamente, que cada móvil continúa avanzando de manera constante hacia el sur, diseñan una tabla como la siguiente con las distancias que recorrería cada móvil en función del tiempo –tomándolo, por ejemplo, cada media hora– y una duración que permita calcular, al menos, la hora en que llegaría el peatón a Hospital.

Tiempo / Móvil	**30 minutos**	**60 minutos**	**90 minutos**	**...**
Peatón	2.5 km	5 km		
Ciclista				
Automovilista				

Analizan la tabla y responden a preguntas como:

¿Qué tipo de relación proporcional se establece entre las variables tiempo y distancia?

¿Qué importancia tiene en ese tipo de relación proporcional considerar que el movimiento se realiza a una velocidad constante?

¿Qué ocurriría con las rectas que representan el movimiento de cada móvil en el gráfico si no se considerara una velocidad constante?

Determinan cuál es el cuociente constante (razón constante) en este caso y que caracteriza la proporcionalidad directa.

COMENTARIO

El objetivo principal de esta situación es que, a partir de los conocimientos sobre relaciones proporcionales adquiridos en el nivel anterior y de su experiencia en la lectura de gráficos habitualmente utilizados en los medios, los alumnos y alumnas puedan crear estrategias para obtener más información que la explicitada en el gráfico. En su análisis es importante llevarles a establecer con claridad la relación entre las dos variables (distancia y tiempo) que, según las condiciones establecidas en la situación, es proporcional y directa. El sentido común indica que, efectivamente, el peatón es el que toma más tiempo y el automovilista, menos. No obstante, es gracias a la manipulación sobre el gráfico que se pueden obtener informaciones precisas. Para responder a la primera pregunta se puede, por ejemplo, trazar una vertical, paralela al eje Y, desde la primera hora transcurrida (9 h) de tal modo que se pueda leer el recorrido de cada móvil en ese tiempo (5 km el peatón, 20, el ciclista, y 60 el automovilista) determinando de ese modo la velocidad por hora de cada uno. La tabla permite ver la proporcionalidad tanto entre las variables como entre los móviles. Y, finalmente, calcular el tiempo total que tomaría el ciclista y el peatón en llegar a Hospital y, eventualmente a una ciudad más lejana de Santiago (Rancagua, Chillán, etc.). Es importante que el gráfico sea adaptado a ciudades conocidas o cercanas a los alumnos y alumnas con el fin de facilitar su compromiso con la situación.

b) A partir del gráfico y de la tabla elaborada calculan la velocidad (en este caso es constante) que lleva cada uno de los móviles.

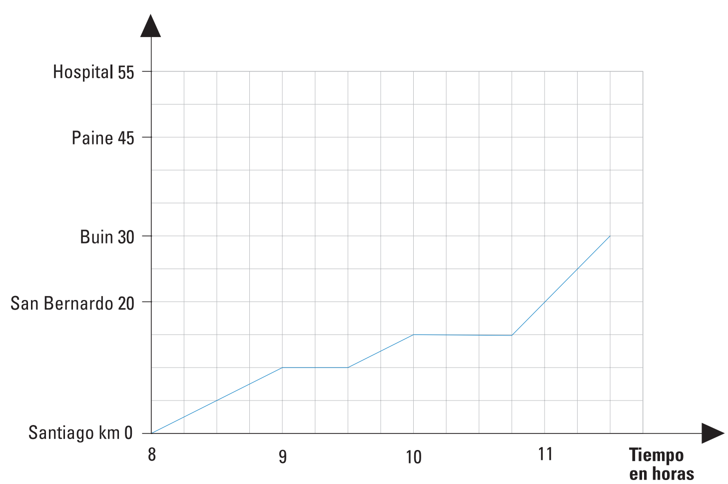
Analizan las relaciones entre las tres variables involucradas. Para ello pueden elaborar una tabla como la siguiente:

	Tiempo transcurrido al recorrer			
Velocidad	**1 km**	**5 km**	**20 km**	**60 km**
Peatón 5 km/h	$\frac{1}{5}$ hora	1 hora	4 horas	
Ciclista 20 km/h	$\frac{1}{20}$ hora	$\frac{1}{4}$ hora		
Automovilista 60 km/h	$\frac{1}{60}$ hora	$\frac{1}{12}$ hora		

¿Qué tipo de relación proporcional se establece entre las variables velocidad y tiempo considerando que, en este caso y a velocidad constante, a mayor velocidad menor es el tiempo que se demora cada móvil en recorrer una misma distancia?

Calculan el producto constante que caracteriza esta proporcionalidad inversa, en cada caso.

c) Analizan la situación anterior considerando nuevas condiciones que se reflejan en el siguiente gráfico:



Interpretan el gráfico y describen el itinerario del peatón: determinan el punto de partida, el avance en la primera hora, el tiempo en que se detiene, a qué hora continúa y cuánto avanza, etc.

¿Qué diferencia se aprecia entre la representación de este recorrido del peatón y el representado en el primer gráfico?

¿Cómo se podría caracterizar la relación entre las variables tiempo y distancia recorrida en este caso?

Si bien a medida que pasa el tiempo el peatón avanza en su trayecto, ¿es regular su avance?

COMENTARIO

En la nueva descripción de la situación, la relación entre las variables tiempo y distancia recorrida no es proporcional puesto que, por ejemplo, en la primera hora el peatón avanza 10 km y en la segunda sólo avanza 5 km. Es importante profundizar con los alumnos y las alumnas en el análisis de las tres situaciones propuestas y comparar las condiciones de cada una de ellas con el fin de obtener conclusiones respecto de las características de las relaciones proporcionales directas e inversas y de aquellas en que no existe variación proporcional. Es habitual pensar que si al aumentar el valor de una variable la otra también aumenta, existiría proporcionalidad directa. No obstante, dicha relación, para que sea proporcional debe cumplir con ciertas condiciones: en el caso de la variación directamente proporcional existe un cuociente constante entre pares de valores y en el caso de la inversa existe un producto constante. En el tercer caso presentado no es posible establecer ni uno ni el otro. Por lo tanto, en ese caso particular, la variación de la distancia no es proporcional (ni directa ni inversamente) al tiempo.

Actividad 2

Resuelven situaciones diversas de variación proporcional entre dos magnitudes; utilizan diversos métodos y herramientas tanto gráficos como numéricos y algebraicos.

- **Analizan las relaciones que se pueden establecer entre los valores de las magnitudes involucradas y obtienen conclusiones en relación con el cuociente constante y el producto constante.**
- **Evalúan críticamente los diferentes métodos y herramientas en función de las características de cada tipo de situación.**

Ejemplo

a) ¿Se puede calcular, de manera aproximada, la distancia que avanza una bicicleta conociendo la longitud del perímetro de sus ruedas?

- Intentan diferentes estrategias, gráficas o numéricas, para dar una respuesta razonable a la pregunta y justificarla.

COMENTARIO

Es importante dejar a los alumnos y alumnas abordar la situación de manera muy libre, de tal modo que para intentar una respuesta recurran a sus conocimientos y experiencias previas. Es muy importante pedirles que fundamenten sus razonamientos.

Se les puede ayudar proponiéndoles, por ejemplo, que dibujen una rueda y determinen, imaginando que se puede "estirar", lo que recorre en una vuelta. También es importante que el tamaño de las ruedas sea razonable.

- Consideran una bicicleta que cada cinco vueltas de sus ruedas (de cada una) avanza 9 metros. Observan y analizan la siguiente tabla en la cual se ha registrado sistemáticamente la relación entre el número de vueltas y la distancia recorrida expresada en metros:

Nº de vueltas de la rueda	5	10	15	18	28	100	.....
Distancia recorrida en metros	9	18	27				.....

Observan que cuando el número de vueltas se duplica, también se duplica la distancia recorrida (expresada en metros).

$\cdot 2$

Nº de vueltas de la rueda	5	10
Distancia recorrida en metros	9	18

$\cdot 2$

Y que cuando el número de vueltas se multiplica por 3, por ejemplo, la distancia recorrida en metros también se triplica.

- Determinan por cuánto se ha multiplicado 5 para obtener 18 vueltas y calculan la distancia recorrida después de 18 vueltas de la rueda. Continúan calculando los demás valores.

COMENTARIO

Es importante concentrar la actividad en el análisis de las relaciones entre los valores de las variables. En esta primera parte, el énfasis está puesto, como ya se vio en el nivel anterior, entre valores de una misma variable, relacionando, así, número de vueltas entre sí y distancias recorridas, también, entre sí. Posteriormente, en esta misma actividad, la atención se centrará en establecer un cuociente constante, el cual se obtiene de la razón entre los valores de las dos variables (vueltas de la rueda y distancia recorrida).

- Considerando la misma tabla anterior buscan una manera de calcular el número aproximado de vueltas que debe dar la rueda para recorrer una distancia, aproximada, de 25 metros, 28 metros o 50 metros.

• ?

• 2

Nº de vueltas de la rueda	5	10	15	18	28	100	.....
Distancia recorrida en metros	9	18	27	?			.....

• 2

• ?

Redactan conclusiones referidas al procedimiento que han utilizado.

- Analizan la tabla considerando, esta vez, la relación entre los valores de una misma columna, es decir, analizan las razones que se pueden establecer entre el número de vueltas y la distancia recorrida, respectivamente.

Nº de vueltas de la rueda	5	10	15	18	28	100	.....
Distancia recorrida en metros	9	18	27	?			.....

- ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{9}{5}$, por ejemplo? ¿Y el de la razón $\frac{18}{10}$? Etc.

  Toman cualquier par de valores (de una misma columna) y calculan la razón. Por ejemplo, toman 27 metros y 15 vueltas. ¿Qué representa este valor? ¿Por qué es constante?

- Escriben una conclusión respecto del valor de este conjunto de razones. Calculan valores cualesquiera de alguna de las variables, por ejemplo, el número de vueltas necesarias para recorrer 250 metros, o al revés, utilizando la conclusión obtenida.

- Construyen un gráfico que les permita encontrar soluciones y discuten sobre las ventajas de cada una de las maneras de encontrar valores desconocidos en esta situación (tabla, gráfico, cálculos a partir de las razones).

- Caracterizan la variación proporcional directa a partir del gráfico (lo describen) y del cuociente constante (lo interpretan).

COMENTARIO

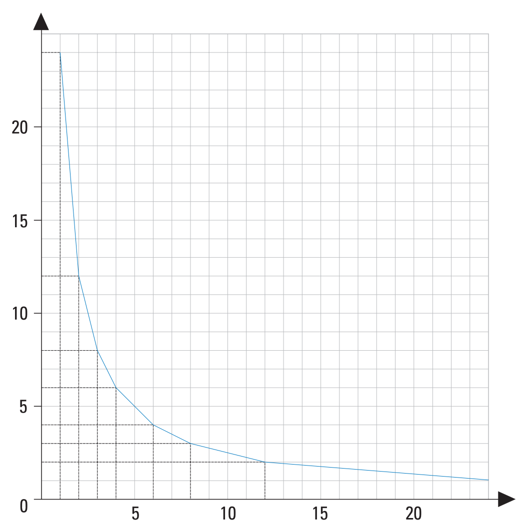
Es muy importante cuidar que los alumnos y alumnas vayan registrando ordenadamente sus observaciones y conclusiones de tal modo que puedan darse cuenta de las diferentes relaciones que se pueden establecer entre los valores, ya sea que se tomen pares de valores de una misma variable o pares que relacionen a las dos variables (en el nivel anterior se llamó “razón interna” a la primera y “razón externa” a la segunda). No obstante esta diferencia, los resultados son los mismos debido a que la relación es proporcional.

Posteriormente es necesario proponer otras situaciones de modo que se pueda encontrar y aplicar directamente el cuociente constante, que es una manera de definir una relación directamente proporcional, para encontrar valores desconocidos de una u otra variable.

Por otra parte, las razones externas se pueden establecer considerando, como se muestra en el ejemplo, $\frac{9}{5}$ ó 1,8, y también $\frac{5}{9}$ lo que es igual a 0,625. La primera razón se establece entre metros y vueltas de la rueda; la segunda entre vueltas de la rueda y metros recorridos. Es importante que se tenga presente el orden en que se establece la relación y comprobar que cualquiera de las dos es válida.

En esta actividad se ha abordado la proporcionalidad directa. Si no se ha tratado el gráfico de proporcionalidad inversa en la Actividad 1 es recomendable hacerlo ahora. Para ello se incluye la siguiente actividad.

b) Analizan el gráfico siguiente en el cual se han representado las dimensiones de un conjunto de rectángulos cuya área es igual a 24 metros cuadrados.



¿En cuál de los ejes se representa la base? ¿Y la altura?

¿Da lo mismo si se utilizan indistintamente?

- A partir del gráfico completan una tabla como la siguiente, en la cual se va incrementando la base y, consecuentemente, disminuyendo la altura de los rectángulos:

Base	Altura
2	12
3	8
4	6
5	.....
6	.....

- ¿La altura del rectángulo podría ser igual a, por ejemplo, 0,5 metros? ¿Cuánto tendría que medir la base de ese rectángulo?
- ¿Cómo sería la tabla y el gráfico si el área común de los rectángulos fuera, por ejemplo, 36 metros cuadrados? Construyen la tabla y el gráfico correspondiente.

COMENTARIO

Es importante observar que el producto entre los valores es constante (2x12=24; 3x8=24; 4x6=24, etc.) lo cual es evidente puesto que se trata de un conjunto de rectángulos que tienen la misma área. Se trata, en consecuencia, de una situación en que la relación entre las variables involucradas es inversamente proporcional. Aunque esta situación fue trabajada en el nivel anterior, ahora se toma nuevamente con el fin de mostrar a los alumnos y alumnas un tipo de gráfico particular y la característica fundamental de la proporcionalidad inversa: el producto constante entre los pares de valores de las dos variables involucradas. El mismo análisis se puede abordar con cualquier situación de proporcionalidad inversa.

Actividad 3

Analizan problemas de distribución proporcional y las resuelven a través de métodos y herramientas diversas, gráficos y numéricos. Evalúan los procedimientos en función de las condiciones de los problemas.

Ejemplo

Analizan la siguiente situación y discuten tanto el procedimiento como el resultado obtenido. Luego, aplican sus conclusiones para resolver e interpretar una nueva situación (b).

a) Dos personas deben reunir $400.000 para un negocio y, como son muy amigas, quieren que el aporte de cada una sea proporcional a sus ingresos (las ganancias las distribuirán también proporcionalmente).

   Una de ellas, llamada Paula, gana mensualmente $300.000.

   La otra, llamada Antonio, gana $200.000 por mes.

   Luego de una larga conversación y de hacer algunos cálculos llegan a la conclusión de que para que sus aportes sean proporcionales a sus sueldos Paula debe aportar $240.000 y Antonio debe aportar $160.000.

- Discuten la conclusión: ¿Es adecuado el aporte de cada uno? ¿Es un aporte proporcional a lo que cada uno gana?, ¿por qué?
- ¿Qué procedimientos se pueden utilizar para calcular estos aportes proporcionales? Discuten al menos dos procedimientos diferentes.

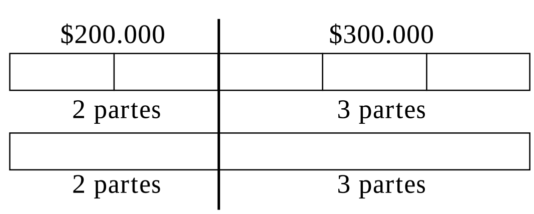
COMENTARIO

Con el fin de ayudar a los alumnos y alumnas a visualizar la situación se les puede proponer los siguientes tres procedimientos:

- Un esquema gráfico como el siguiente:

Suma de lo que gana cada persona:

Aporte total: $400.000



- Un procedimiento basado en razones:

La razón entre los sueldos es $\frac{3}{2}$ porque $\frac{300.000}{200.000} = \frac{3}{2}$

Entonces, el aporte de Paula es igual a $\frac{3}{2}$ del aporte de Antonio (es decir, igual a 1,5 veces).

Así, el aporte de Antonio más el de Paula (que corresponde a 1,5 ó $\frac{3}{2}$ del de Antonio) es igual $400.000.

Es decir,

$$\frac{3}{2} \text{ aporte Antonio} + \text{aporte de Antonio} = 400.000$$

$$\frac{5}{2} \text{ del aporte Antonio} = 400.000$$

$$\text{Aporte de Antonio} = \frac{400.000 \bullet 2}{5} = 160.000$$

Es decir, Antonio aporta $160.000 y Paula $ 240.000.

- Se puede hacer directamente la asociación con porcentajes, es decir, “3 de 5 equivale a 60% y 2 de 5 equivale a 40%”.

En problemas como estos, los alumnos y alumnas tienen ocasión de analizar y/o crear procedimientos de resolución en que se aplican diversos conocimientos adquiridos anteriormente en relación con las proporciones y los porcentajes. Es importante que se utilicen diversas estrategias con el fin de que puedan evaluarlas, tanto en función de la situación así como de sus propios conocimientos.

Aunque éste es un problema que también se puede resolver planteando un sistema de dos ecuaciones, cuestión que se verá en Primer Año de Educación Media, es perfectamente posible resolverlo sin hacer uso de ellas.

b) Analizan y resuelven la siguiente situación problema:

“Tres hermanas deben reunir $560.000 entre las tres para la manutención de su casa aportando proporcionalmente a los ingresos de cada una.

María gana mensualmente $250.000, Josefina gana $350.000 y Marisol gana $200.000.

¿Cuánto debe aportar cada una de ellas al fondo común para que su aporte sea, efectivamente, proporcional a su sueldo?”

- Explican sus procedimientos y justifican los resultados.

COMENTARIO

En esta situación, aunque es muy similar a la anterior, están involucradas tres cantidades que deben aportar proporcionalmente para formar el fondo común. Aunque es posible utilizar una representación gráfica como la descrita en el comentario anterior, no resulta evidente la repartición. Es importante orientar a los alumnos y las alumnas a dividir sucesivamente por un mismo número la remuneración de cada hermana con el fin de establecer una triple razón. Dividiendo por cincuenta se obtiene 7:5:4 como la razón entre las remuneraciones. Es ésta la razón que debe ser aplicada sobre el total del aporte ($560.000) para obtener la repartición. Si se suman los componentes de la razón 7, 5 y 4 se obtiene 16. Se divide 560.000 por 16 y se asigna 7 partes a una, 5 a la otra y 4 a la última (se obtiene $245.000; $175.000 y $140.000 como aporte de cada hermana, respectivamente).

Como una forma de que sean utilizados procedimientos diversos, puede ser conveniente entregar varios problemas similares para ser trabajados en pequeños grupos, indicando que cada uno debe ser resuelto de manera diferente. Es importante, también, discutir posteriormente tanto los procedimientos como los resultados, hacer una síntesis y remarcar las conclusiones generales.

Actividad 4

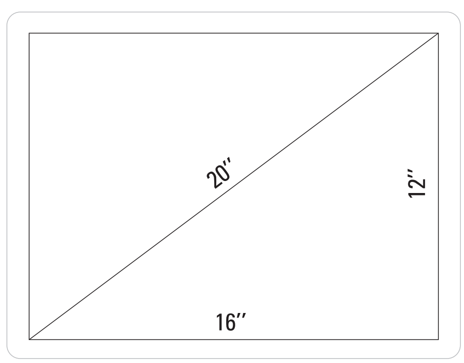
Construyen figuras geométricas semejantes aplicando criterios de proporcionalidad y analizan sus procedimientos.

Ejemplos

1. Los televisores suelen identificarse de acuerdo a la medida de la diagonal de la pantalla expresada en pulgadas. Así, un televisor de 14 pulgadas tiene una diagonal de esa longitud.

   En la siguiente figura se muestra la pantalla de un televisor dibujada proporcionalmente a una pantalla real.

   La diagonal de la pantalla mide 20 pulgadas, la altura mide 12 pulgadas y el ancho es de 16 pulgadas.



- Considerando que todas las pantallas son semejantes para que no se deforme la imagen: es decir, si la diagonal de una pantalla mide el doble que la del dibujo, sus lados correspondientes también deben medir el doble porque, de otro modo, la imagen se vería deformada, ¿cuánto deberían medir los lados de una pantalla cuya diagonal mide 14 pulgadas?

  Discuten la situación y establecen algún procedimiento que les permita encontrar una solución. Fundamentan su forma de resolver y la respuesta.

- Elaboran una tabla como la siguiente para calcular las dimensiones de varias pantallas de televisor conociendo algunas de sus medidas:

	Ancho	Alto	Diagonal
Pantalla 1	16 pulgadas	12 pulgadas	20 pulgadas
Pantalla 2	?	?	14 pulgadas
Pantalla 3	?	?	28 pulgadas
Pantalla 4	?	?	25 pulgadas
Pantalla 5	......	......	......

$\frac{7}{10}$

COMENTARIO

Se ha utilizado pulgadas para expresar las longitudes porque así se identifican los televisores. No obstante, y con el fin de hacer comprobaciones en casos concretos, es posible expresarlas también en centímetros. De todos modos, al medir con una huincha que tenga pulgadas será difícil obtener mediciones muy exactas.

- En cada caso establecen la razón correspondiente según el dato aportado en la tabla para calcular las otras medidas.

  Por ejemplo: $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

  Es decir, la razón es $\frac{7}{10}$, entonces, $14 = 20 \times \frac{7}{10}$

  En consecuencia, las otras medidas se obtienen multiplicando las medidas originales por $\frac{7}{10}$.

  Alto: $12 \times \frac{7}{10} = 8{,}4$

  Ancho: $16 \times \frac{7}{10} = 11{,}2$

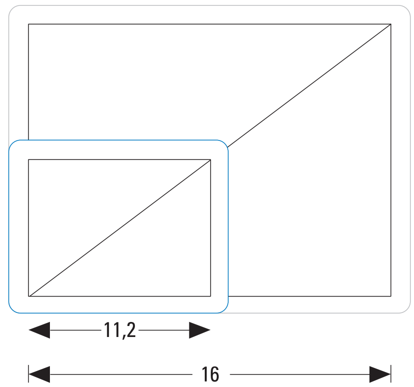
- Sobre el dibujo original (rectángulo de 16 por 12) dibujan los nuevos rectángulos obtenidos. Escriben sus conclusiones respecto de la superposición de los rectángulos.

COMENTARIO

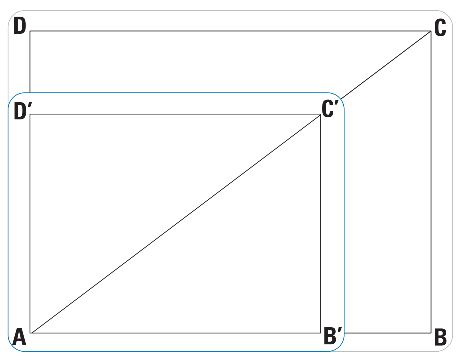
Es muy importante hacer ver a los alumnos y alumnas que para que los rectángulos (representan a las pantallas) no deformen la imagen deben ser semejantes. Esto significa que si se disminuye a la mitad la diagonal, todos los lados deben hacerlo en la misma razón $\frac{1}{2}$. Para mayor claridad, se les pide analizar los datos en una tabla.

También se puede establecer la razón externa: 20 : 16 : 12 = 5 : 4 : 3

Por ser rectángulos semejantes, es posible superponerlos y se puede observar que las diagonales coinciden.



Por medio de la superposición de los rectángulos se ve claramente que los lados del nuevo rectángulo son proporcionales al que representa la pantalla inicial. En el caso de la pantalla cuya diagonal mide 40 cm el dibujo queda de la siguiente manera:

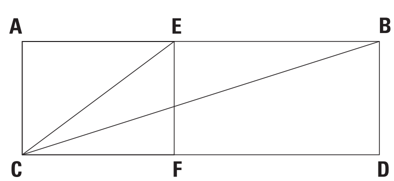


La diagonal AC' es $\frac{2}{3}$ de la diagonal AC

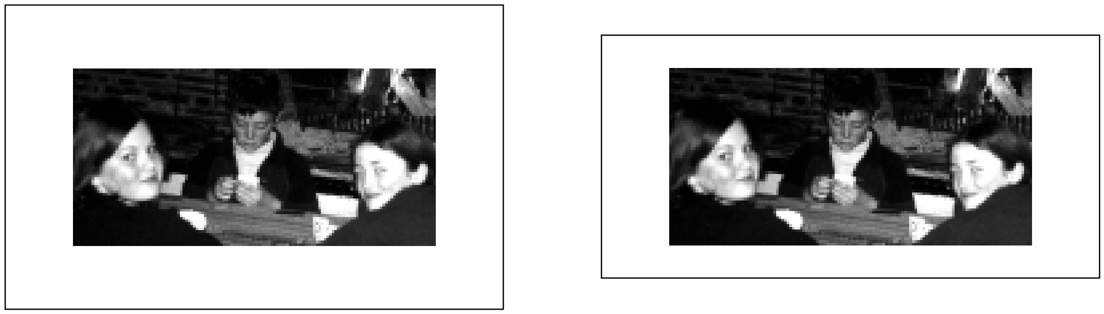
Situando el punto C' en $\frac{2}{3}$ del segmento AC se puede trazar las paralelas a AD y AB, respectivamente. De esa forma se obtienen un rectángulo semejante al inicial, es decir, cuyos lados y diagonal son proporcionales a éste.

Se puede ver, de esta forma, que todos los rectángulos que se dibujen de la misma manera serán semejantes.

Terminar la actividad comentando que no se puede generalizar en el sentido de creer que cualquier rectángulo es semejante a otro. Por ejemplo, en un dibujo se puede ver que el rectángulo ABDC no es semejante con el rectángulo AEFC:



2. Observan la siguiente figura que representa dos cuadros con sus respectivas fotos:

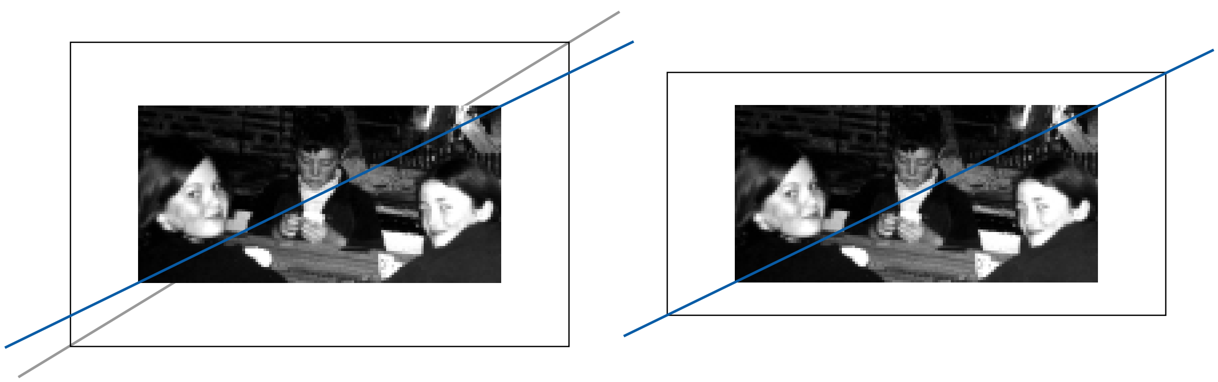


- Analizan en cada caso la relación entre la foto (rectángulo interior) y el marco (rectángulo exterior), a partir de preguntas como:

  ¿Cuál par de rectángulos parece "más proporcionado"?, ¿por qué?

  ¿Qué significa que estos pares de rectángulos (el exterior y el dibujado en su interior, en cada caso) sean proporcionales? ¿Cómo se puede determinar que son proporcionales?

- Aplican el siguiente procedimiento para establecer en qué caso el rectángulo interior y el exterior tienen medidas proporcionales (es decir, son semejantes).



Trazan las diagonales correspondientes y ven si coinciden.

Si no coinciden, pueden aplicar cualquiera de los siguientes procedimientos con el fin de comprobar la semejanza:

- "Alinear" los rectángulos haciendo coincidir un vértice y los dos lados correspondientes;
- Comprobar si las diagonales son paralelas.

- Luego de hechas las comprobaciones, discuten los procedimientos aplicados y los fundamentan: ¿Por qué para comprobar la semejanza se observa si coinciden o no las diagonales? ¿Por qué si no coinciden debido a la ubicación de los rectángulos basta con ver si son paralelas?

COMENTARIO

Es importante que los alumnos y alumnas discutan libremente sobre la manera de poner el marco en una foto ya que la proporcionalidad entre ésta y el marco puede no ser necesariamente la forma que les parece más adecuada estéticamente.

Respecto de las orientaciones para obtener y fundamentar conclusiones generales, ver comentario del ejemplo anterior.

Actividad 5

Resuelven problemas relacionados con representación a escala:

Amplían o reducen según una razón dada. Caracterizan la razón como una escala.

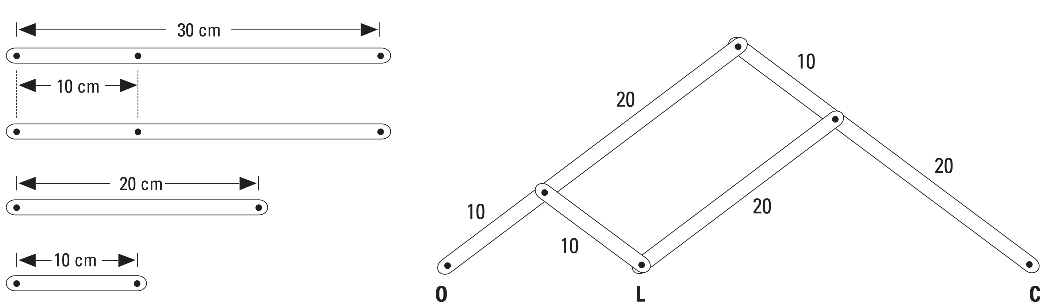
Determinan la escala adecuada para ampliar o reducir dibujos en determinadas situaciones.

Determinan la escala en que se ha ampliado o reducido un determinado dibujo.

Ejemplos

1. Un pantógrafo es un instrumento que permite reproducir una figura punto por punto, ya sea ampliándola o reduciéndola.

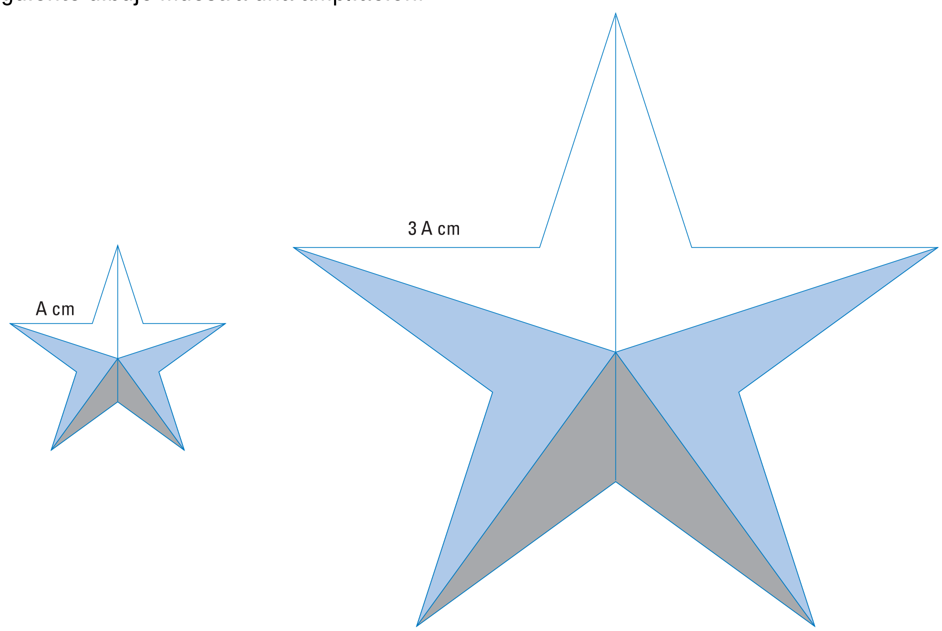
- Observan y analizan el siguiente dibujo de un pantógrafo y construyen uno similar:



En el punto O se pone un pequeño clavo que permita fijar el pantógrafo en un punto.

Para ampliar el dibujo se pone en el punto C un lápiz y en el punto L una pequeña punta roma (de madera, por ejemplo), que permite recorrer el dibujo original mientras el lápiz va reproduciéndolo en otra parte de la hoja; o a la inversa si se quiere reducir.

El siguiente dibujo muestra una ampliación:



- Analizando el pantógrafo y la relación entre los distintos segmentos, ¿dónde se puso el lápiz y dónde el “cursor” para producir esta ampliación?
- ¿En cuánto se agrandaron los segmentos?
- Establecen conclusiones respecto de las razones entre los segmentos del pantógrafo y entre los segmentos de los dos dibujos.

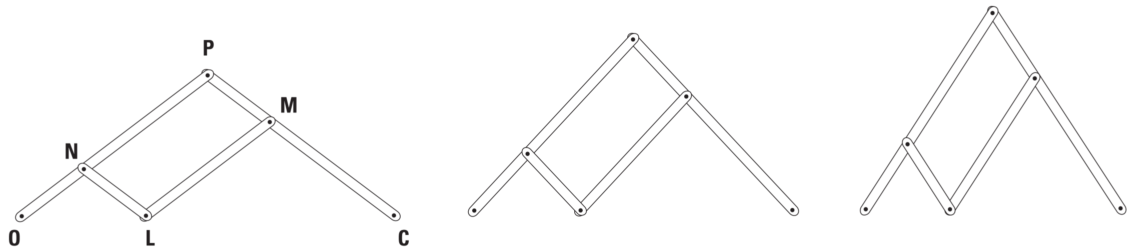
  ¿Por qué con este pantógrafo se produce una ampliación de 300% (se multiplica por tres la medida de los elementos lineales)?

  ¿Cómo habría que construirlo para producir una duplicación (o reducción a la mitad)? Es decir, para que los trazos correspondientes estén en una razón de 1:2 (ó 2:1, respectivamente).

COMENTARIO

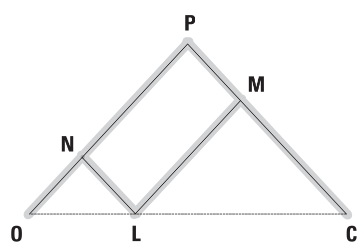
El pantógrafo se puede construir con cartón rígido. Es en el proceso de construcción en que se observan las relaciones entre las medidas. Por esta razón, la actividad requiere que los alumnos y alumnas lo construyan y no es conveniente que lo compren y sólo lo usen para dibujar.

El pantógrafo puede tomar muchas posiciones al hacer variar las aberturas de los ángulos tal como se muestra en el dibujo a continuación:



Para analizar y fundamentar el efecto del pantógrafo es necesario establecer dos hipótesis: los puntos O, L y C parecen estar alineados cualquiera sea la abertura del ángulo del vértice P, y el largo del segmento OL parece estar en una razón constante con el segmento LC.

Se puede demostrar que estas hipótesis son verdaderas, cuestión que se hará en la Enseñanza Media. Finalmente, se puede asociar el pantógrafo a una figura como la siguiente:



En la figura se pueden observar (y se puede demostrar) que se producen triángulos semejantes. En el caso del pantógrafo construido, la razón entre el largo de los segmentos OC y OL es de 3 a 1. Por esa razón los elementos lineales del dibujo (estrella) se triplican.

2. Analizan mapas y planos diversos (ver Anexo 1).

- Interpretan las escalas a partir de preguntas como las siguientes:

  ¿Cómo se expresa la escala?

  ¿Cuáles son los elementos que se relacionan en la escala de un plano o mapa?

  ¿Daría el mismo resultado si se relacionaran, por ejemplo, las áreas? (es decir, si la escala propusiera una razón entre áreas: una real y la otra de la reproducción reducida).

- Eligen un objeto, una casa, la escuela, una sala, una cancha de fútbol, por ejemplo, para representarlo de acuerdo a una escala conveniente.

  Explican los criterios utilizados para elegir una escala.

- Realizan el dibujo correspondiente.

  Registran el proceso de dibujo y explican, por ejemplo, cómo resolvieron el dibujo de ángulos, en caso de haberlos, o el trazado de rectas paralelas.

  Justifican adecuadamente por qué pueden asegurar que su dibujo representa adecuadamente el objeto elegido y que, efectivamente, se mantienen las proporciones.

COMENTARIO

La escala representa la razón que se establece entre la medida de las distancias en la realidad y las del dibujo. Habitualmente la escala no se acompaña con las unidades de medida. No obstante, al pie del mapa o plano se especifica a qué corresponde la unidad. Por ejemplo: 1 cm: 1.000 km.

Actividad 6

Analizan situaciones en las que se observan variaciones porcentuales. Establecen procedimientos de cálculo para encontrar valores desconocidos.

Ejemplo

Leen y comentan la situación siguiente:

Una persona deposita en una institución financiera una cantidad de dinero por la cual se gana, acumulativamente, un interés de 2% cada tres meses. Ella desea calcular los intereses y los montos que irá acumulando en cada uno de esos periodos de tiempo y cuánto tendrá al cabo de un año.

a) Formulan hipótesis referidas a la información que desea conocer la persona de la situación. Orientan su análisis a partir de preguntas tales como:

   ¿Cómo se calcula el interés y el monto total que tendría al cabo de 3 meses?

   ¿A los seis meses, habrá que sumarle el 4% a la cantidad inicial?

   ¿Entonces, a los 12 meses tendrá un 8% más que al comienzo?

   Si no es así, ¿cómo habría que hacer el cálculo?

b) Analizan los siguientes procedimientos para calcular el monto total que tendría al cabo de tres meses, es decir, 10.000 más el 2% de 10.000:

- $10.000 + (10.000 \times \frac{2}{100})$
- $10.000 \times (1 + \frac{2}{100})$
- $10.000 \times \frac{102}{100}$
- $10.000 \times 1{,}02$

¿Cuál de ellos les parece correcto?, ¿por qué?

COMENTARIO

Evidentemente, todos los procedimientos presentados son correctos. Lo más importante es hacer visible a los estudiantes la equivalencia entre ellos y llevarles a discutir cada uno en función de su rapidez, eficiencia, o de las posibilidades de poder visualizar permanentemente lo que se está buscando. Muchas veces, al llegar directamente a un procedimiento breve (como el último, por ejemplo) no se comprende de dónde viene, por qué es posible utilizarlo.

c) Elaboran una tabla como la siguiente para registrar los cálculos de los intereses y montos sucesivos que se obtendrían con un depósito de, por ejemplo, $150.000.

Monto inicial: $ 150.000

	Cálculo del interés	**Total trimestre**
3 meses	2% de 150.000 150.000 x 0,02	150.000 más el 2% ó 150.000 x 1,02 (u otro procedimiento)
6 meses		

COMENTARIO

Al completar la tabla orientar a los alumnos y alumnas a buscar la manera más cómoda para ellos de registrar tanto los resultados como los procedimientos. De ese modo podrán, posteriormente, obtener procedimientos generales.

d) Analizan la siguiente tabla en la que se muestra una manera de calcular la variación del depósito cada tres meses:

Monto inicial	3 meses	6 meses	9 meses	12 meses
150.000	153.000			

• 1,02 • 1,02 • 1,02 ...

- Comprueban que al mes 12 (o sea, al final del cuarto trimestre) el interés acumulado será igual a

  150.000 x 1,02 x 1,02 x 1,02 x 1,02

  150.000 x $(1,02)^4$

y que el monto acumulado será igual a

  150.000 x 1.0824 = 162.364 (aproximadamente)

Justifican el procedimiento que utilizaron para hacer la comprobación.

- Concluyen sobre el cálculo sucesivo de un porcentaje y cómo va variando el referente, cada vez que se aplica el porcentaje.

COMENTARIO

En este tipo de ejemplo se trata, por una parte, de que los alumnos y alumnas hagan cálculos sucesivos de porcentajes sin perder de vista que la cantidad que representa el 100% es variable puesto que se le van agregando sucesivamente los intereses. Es importante que sus conclusiones se orienten a establecer la equivalencia de los diferentes procedimientos y hacer explícitas algunas propiedades que la permiten (en este caso, por ejemplo, la distributividad de la multiplicación respecto de la adición):

$$A + 10\% \text{ de } A = A + A \cdot \frac{10}{100} = A \cdot (1 + 0{,}10) = A \cdot 1{,}10$$

Por otra parte, con el fin de afianzar la conclusión, hay que mostrarles las diferencias que se producen en los resultados si, por ejemplo, erróneamente se sumaran primero los porcentajes y luego se aplicara a la cantidad inicial. También se refuerza así la diferencia que hay entre multiplicar por sí mismo cuatro veces 0,02 (en este caso) y multiplicar 0,02 por 4.

Actividad 7

A través de estrategias diversas, resuelven problemas que implican encontrar el 100%, a partir de una cantidad que ha resultado de descontar o aumentar un determinado porcentaje. Establecen procedimientos generales y demostraciones algebraicas.

Ejemplos

1. Leen y comentan la siguiente situación:

   Fernando hace una venta en su negocio por un total de $28.000 (con el IVA incluido) y el cliente le pidió especificar el monto correspondiente al IVA (Impuesto al Valor Agregado que corresponde al 18% del precio neto).

   Fernando le dice al cliente: como el precio de venta es $28.000, el IVA corresponde a $4.271.

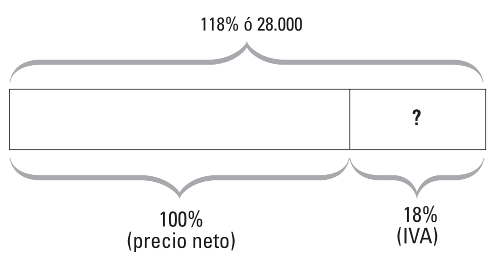
   El cliente no estuvo de acuerdo y le dijo que el IVA era de $5.040: es decir, el 18% de $28.000. Y que para él era importante puesto que podía descontarlo de sus impuestos.

   ¿Quién tiene la razón, Fernando o el cliente? ¿Por qué?

   Representan esquemáticamente en un dibujo la situación para fundamentar su respuesta.

COMENTARIO

Una manera de representar en forma simple la situación, con el fin de visualizar cuál es la cantidad que corresponde al 100%, es la siguiente:



Es muy común que al descontar el IVA de un precio final se produzca la confusión del cliente en esta situación. El dibujo es muy apropiado para comprender por qué sumar un porcentaje a una cantidad no es lo mismo que descontar ese mismo porcentaje a la cantidad resultante que es, evidentemente, mayor.

2. Analizan facturas como la siguiente:

Don Pantaleón
Mercaderías Varias
Fecha: **Factura Nº 1234**

Precio neto	$ 250.000
IVA	$ 45.000
Total	$ 295.000

¿Sobre qué cantidad se ha calculado el 18%?

¿Cómo se puede obtener el precio final directamente? (es decir, cómo obtener $295.000 sin calcular primero el 18% y luego sumarlo).

¿Por qué si se calcula el 18% del precio total y se le descuenta NO se obtiene $250.000?

Si el precio del un artículo sin IVA (precio neto) fuera igual a $100.000 ¿Cuánto costaría con el IVA incluido?

Si se sabe que el precio con IVA, es decir, precio neto más 18%, de un artículo es $118.00, ¿cómo se calcula el precio sin IVA, es decir, qué hay que hacer para obtener el precio inicial de $100.000?

COMENTARIO

Como en el ejemplo anterior, con este ejemplo se trata de orientar a los alumnos y alumnas para que obtengan conclusiones generales como:

$$A + B\% \text{ de } A = C$$

$$C - B\% \text{ de } C \text{ NO es igual a } A$$

Para mayor claridad, es interesante proponer que un artículo cuesta exactamente $100. De ese modo se ve inmediatamente que 18% de 100 es menor que 18% de 118.

A partir de situaciones como éstas es importante introducir el uso de ecuaciones para expresar relaciones y para resolver. Así, proponiendo una proporción y luego una ecuación se puede encontrar cualquiera de los valores involucrados: Si A es la cantidad inicial a la cual se le aplicará el impuesto se tiene:

$$A + 18\% \text{ de } A = C$$

$$\frac{118}{100} \cdot A = C$$

$$\frac{A}{100} = \frac{C}{118}$$

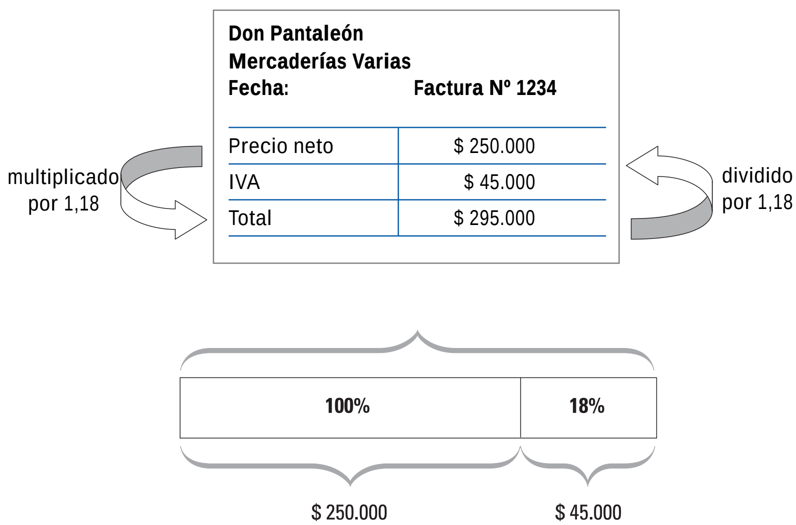
Entonces,

Si A es el valor desconocido se tiene $A = \dfrac{C \cdot 100}{118}$

Si C es el valor desconocido se tiene $C = \dfrac{A \cdot 118}{100}$

Esto permite que las diversas situaciones referidas a porcentajes puedan ser bien comprendidas y los alumnos y alumnas cuenten con herramientas “razonadas” más que mecánicas para resolverlas.

Por otra parte, tal como se hizo en el ejemplo anterior, se puede apoyar la visualización de los elementos del problema (el referente, incremento, variación) a través de una esquema gráfico como el siguiente:



Actividad 8

Resuelven problemas que impliquen sucesivas aplicaciones de porcentaje, procedimientos de cálculo generales y los fundamentan sobre la base de propiedades de las operaciones.

Ejemplos

1. Discuten la siguiente situación:

   Un vendedor comunica a un cliente que sobre el precio total de su compra debe aplicar un impuesto de 20% pero que le hará un 10% de descuento. Y le pregunta: “¿Qué quiere que haga primero: el impuesto o el descuento?”

- ¿Qué contestarían?, ¿por qué?

- Muestren con un ejemplo que su respuesta es adecuada.
- ¿Se puede decir que basta con sumar el 10% al precio del producto para obtener lo que tiene que pagar el cliente? (es decir, la diferencia entre 20 y 10).
- Crean otros ejemplos numéricos similares y buscan una expresión general que justifique las conclusiones.

COMENTARIO

Es muy habitual que las personas crean que es preferible aplicar el descuento primero de tal modo que el impuesto se aplica “sobre una cantidad menor”. O, al revés, que piensen que es preferible aplicar primero el impuesto para, de ese modo, obtener un mayor descuento.

Algebraicamente, el resultado final no varía:

A x 1,20 x 0,90 = A x 0,90 x 1,2 porque la multiplicación es conmutativa.

Obsérvese que a la izquierda se aumenta primero el 20% (se multiplica por 1,20) y luego se descuenta el 10% (multiplicando por 0,90). En el lado derecho se hace a la inversa.

Se recomienda considerar un precio igual a $100 con el fin de hacer muy visible el efecto y comprobarlo.

Por otra parte, también es importante mostrar, como se vio en NB5, por qué sumar a una cantidad un 20%, por ejemplo, es lo mismo que multiplicar la cantidad por 1,2 (se vio en una actividad anterior) y que descontar un 10%, por ejemplo, equivale a multiplicar la cantidad por 0,90 (es decir, encontrar el 90% de la cantidad inicial). Esto no es algo muy evidente para la mayoría de las personas. Y se debe a que, habitualmente, se hace un aprendizaje muy mecánico del cálculo de los porcentajes sin detenerse a analizar las diferentes situaciones que pueden encontrarse.

2. Un trabajador le cuenta a una amiga que en su trabajo le subieron su sueldo un 10% y que le rebajaron un 10% por una deuda que tenía. Según él, si el contador le rebaja el 10% de su sueldo antes del aumento o después a él le da lo mismo porque va a recibir la misma cantidad de dinero. Pero que el contador debe tener cuidado porque si lo aplica antes o después, lo que registrará como pago de la deuda será una cantidad diferente.

- Discuten y determinan si es efectivo que el trabajador recibirá lo mismo como pago, independientemente de sobre qué cantidad le hagan el descuento.
- Calculan la diferencia que se produciría, desde el punto de vista del contador en cuanto al monto pagado por la deuda.
- Muestran con una expresión general un procedimiento que permite comprobar la igualdad independientemente del monto que gana el trabajador.

COMENTARIO

Al igual que en el ejemplo anterior, se quiere mostrar que, por la conmutatividad de la multiplicación, el resultado es el mismo. Si el trabajador gana, por ejemplo, $100.000 (se puede usar 100 con el fin de mostrar claramente la situación), la expresión siguiente muestra el proceso:

$$100.000 \cdot \underbrace{1{,}10}_{\text{aumento de 10\%}} \cdot \underbrace{0{,}90}_{\text{descuento de 10\%}} = 100.000 \cdot \underbrace{0{,}90}_{\text{descuento de 10\%}} \cdot \underbrace{1{,}10}_{\text{aumento de 10\%}} = 99.000$$

Sin embargo, en el primer caso (100.000 • 1,10) su aumento es de 10.000 y el descuento es de 11.000 (110.000 • 0,90). En el segundo caso se le descuenta 10.000 (100.000 • 0,90) y se le aumenta el sueldo en 9.000 (90.000 • 1,10). Para el trabajador da lo mismo en ese mes en relación con lo que recibirá (99.000). No obstante, no da lo mismo registrar que pagó una deuda de 11.000 o de 10.000.

Con esta situación se pretende hacer ver a los alumnos y alumnas que, aunque algebraicamente el cálculo arroja el mismo resultado, en la práctica, y dependiendo de la situación, es muy importante interpretar los resultados que se obtienen.

Actividad 9

Analizan, interpretan y comunican información sobre diferentes situaciones sociales, económicas, naturales proveniente de censos, encuestas u otros registros estadísticos, expresada en porcentajes y presentada en tablas y gráficos. Analizan críticamente los alcances de la información, la representatividad y el aporte de los datos cuantitativos, para una mayor comprensión de los diferentes fenómenos.

Ejemplos

1. Analizan e interpretan resultados de encuestas de opinión (ver ejemplo en el Anexo 2).

- Identifican la institución o personas responsables de la encuesta:

  ¿Es una institución conocida? ¿Es especializada en encuestas de opinión? ¿Pertenece a un grupo con características particulares, por ejemplo, a un partido político, a un grupo económico, Iglesia, etc.?

- Revisan la ficha técnica de la encuesta:

  ¿Qué cobertura tuvo?

¿La muestra es considerada representativa de qué población? (el país; las mujeres mayores de 18 años; etc.)

- Discuten respecto de las limitaciones que podría tener la encuesta para obtener conclusiones generales. Por ejemplo, si fue una encuesta telefónica, ¿podría considerarse representativa de toda la población?, ¿por qué?
- Leen y discuten los resultados de la encuesta (gráficos y tablas) y discuten sobre las conclusiones que ellas y ellos, como estudiantes, podrían sacar a partir de esos resultados y las justifican. Debaten acerca de la validez de las conclusiones propias y de las entregadas por los autores o autoras de la encuesta.
- Aplican la encuesta analizada en el curso (y, si es posible, en un grupo más amplio de la escuela), analizan los resultados y los comparan con los de la encuesta original. Buscan explicaciones a las diferencias o similitudes de los resultados.

COMENTARIO

Es importante que los alumnos y alumnas aprendan a leer una encuesta de este tipo y tengan criterios claros para interpretar la información que se entrega, pero también sus alcances. Por ejemplo, una encuesta telefónica, hecha en la Región Metropolitana, en días de semana, durante el día, a mujeres mayores de 18 años, podría tener una validez limitada porque excluiría a las mujeres trabajadoras. También es importante, y por tal razón se han incluido ejemplos en el anexo, considerar si la encuesta fue hecha por internet. En este caso particular es muy importante fijarse no sólo en que gran parte de la población todavía no tiene acceso a la red sino que, a menudo, son contestadas por muy poca gente.

Algunos sitios en que se puede encontrar gran variedad de encuestas son:
www.latinobarometro.cl
www.lagenteopina.com
www.fundacionfuturo.cl
www.cepchile.cl
www.sociedadcivil.cl

2. Organizados en pequeños grupos, preparan y presentan un trabajo respecto de un tema de interés que incluya información estadística que aporte a la caracterización y análisis del tema que se quiere comunicar.

- Recopilan información en diarios, revistas, boletines oficiales, etc. referida a un tema de su interés.
- Organizan la información de acuerdo a criterios que deben hacer explícitos (por ejemplo, cronológicamente, según fuentes, etc.).

- Formulan preguntas referidas al tema elegido.

  Si la información es insuficiente,

  a) buscan más información adecuada; y/o

  b) la reorganizan y obtienen más información de los datos que ya tienen. Por ejemplo, si sólo tienen las frecuencias absolutas sobre el comportamiento de alguna de las variables, pueden obtener las frecuencias relativas; o si tienen los datos aislados de dos variables referidas a hombres, por una parte, y a mujeres, por otra, pueden obtener las relaciones entre esos valores a través de razones, o comparaciones relativas, etc. Pueden, también, elaborar gráficos que no están en la fuente original.

- Deciden la forma de presentar la información, sus análisis y conclusiones al resto del curso.
- Señalan cuál era la información inicial y cuál elaboraron y con qué propósitos lo hicieron (nuevos gráficos, por ejemplo).
- Redactan y fundamentan sus conclusiones, lo que debe incluir las respuestas a sus preguntas iniciales y otras que surjan en el curso de los análisis.

COMENTARIO

Es muy importante considerar en esta actividad temas de interés de los alumnos y alumnas y orientarlos adecuadamente para que formulen preguntas interesantes y, efectivamente, reorganicen y agreguen información adecuada.

Este tipo de actividad debe incluir diferentes tipos de gráficos y, de manera central, debe orientarse a analizar críticamente las informaciones estadísticas que habitualmente se entregan en la prensa, como, por ejemplo, las encuestas de opinión.

Se recomienda aprovechar el último Censo de Población Nacional para que los alumnos y alumnas distingan entre una encuesta, que se hace a una muestra de una población, y un censo, en el cual se considera a toda la población.

Algunos sitios web en los que se puede encontrar interesante y completa información sobre diferentes temas son:
www.ine.cl
www.conace.cl
www.minsal.cl

Actividades propuestas para la evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de ellas están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

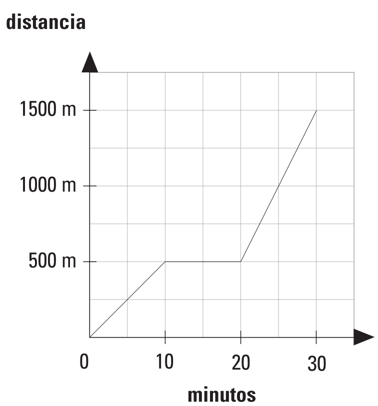
Ejemplos de actividades y problemas

Interpretan situaciones presentadas gráficamente y distinguen entre aquellas que son de proporcionalidad y aquellas que no lo son.

Justifican sus respuestas.

Ejemplo
Observan y analizan los siguientes gráficos y deciden cuál representa una relación proporcional entre las variables involucradas en cada caso y explican por qué.

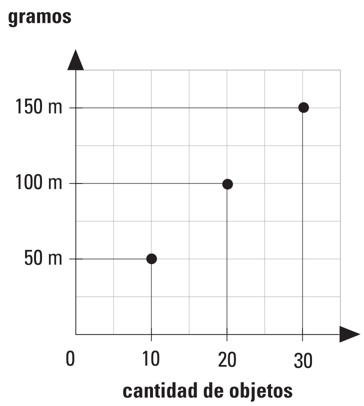
Caminata a pie



Indicadores / Observan que:

- Identifican las variables en cada gráfico.
- Explican con palabras la situación descrita por cada gráfico.
- Determinan correctamente cuál de los dos gráficos representa una relación proporcional.
- Fundamentan adecuadamente.

Peso de varios objetos iguales



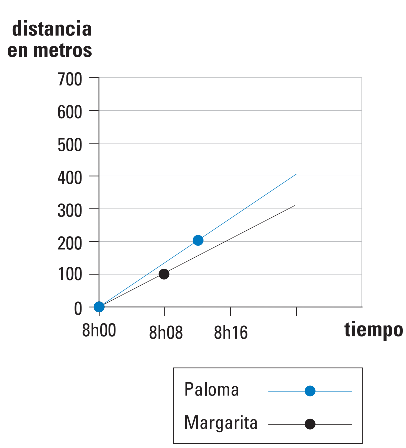
Resuelven diversos problemas de proporcionalidad y explican sus procedimientos.

Ejemplos

1. La velocidad del sonido es de 340 m/s.
¿Cuál es la velocidad expresada en km/h?

2. Se llama "mach 1" a la velocidad del sonido.
¿Cuál es la velocidad en kilómetros por hora de un avión que vuela a mach 1,5?, ¿a mach 2?, ¿a mach 2,5?
Elaboran una tabla y un gráfico.

3. Paloma y Margarita caminan cada una a un paso regular para recorrer una determinada distancia. En el siguiente gráfico se muestra la relación entre la distancia recorrida por cada una de ellas y el tiempo:



- Aplican un procedimiento adecuado para encontrar las respuestas y lo justifican adecuadamente.
- El gráfico y la tabla corresponden a una relación proporcional.

a) Observan el gráfico y responden:
¿Se puede decir cuál de las dos camina más rápido? ¿Qué distancia ha recorrido cada una después de 10 minutos; de 20 minutos, de 50 minutos, etc.?

- Interpretan correctamente que Paloma camina más rápido que Margarita.
- Leen el gráfico correctamente y dan la respuesta adecuada.

b) Calculan la velocidad de desplazamiento de cada una en km/h (considerando que caminan a un "paso regular").

- Entregan una buena aproximación de las velocidades y comprenden que se trata de una situación en que se considera una velocidad constante.

c) Elaboran una tabla que les permita registrar sistemáticamente las distancias recorridas por cada una en función del tiempo, y que permita calcular la distancia recorrida en 5 minutos, 12 minutos, 10 minutos. Establecen el lapso que les parezca más relevante.

- Señalan claramente en la tabla las variables (distancia recorrida y tiempo). Utilizan un lapso que les permita registrar directamente en la tabla las distancias pedidas o trasladan a una tabla los datos explicitados en el gráfico, aplicando un procedimiento adecuado para calcular.

Unidad 3

Números y ecuaciones

TIEMPO ESTIMADO: 7-9 SEMANAS

Contenidos

Números positivos y negativos

- Interpretación del uso de signos en los números, en la vida diaria, en contextos ligados a: la línea cronológica (aC, dC), la medición de temperatura (bajo 0, sobre 0), la posición respecto del nivel del mar.
- Comparación de números enteros con apoyo en la recta numérica.
- Resolución de problemas que impliquen adiciones y sustracciones de números positivos y negativos, con y sin apoyo en la recta numérica.

Ecuaciones de primer grado

- Noción de igualdad de expresiones algebraicas.
- Traducción de situaciones y problemas a ecuaciones con una incógnita.
- Uso de propiedades de los números y de las operaciones para encontrar soluciones.
- Creación de diversos problemas con sentido a partir de ecuaciones con una incógnita.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Comprenden el carácter convencional que tiene el uso de los signos en los números en situaciones en que indican dirección o posición.
2. Interpretan situaciones en las que se involucran números negativos y positivos, y operaciones con ellos.
3. Operan con números positivos y negativos en cualquier contexto y de cualquier orden de magnitud interpretando adecuadamente los resultados.
4. Traducen situaciones que requieren de una solución matemática a expresiones algebraicas adecuadas que permitan encontrar una solución.
5. A partir de una expresión algebraica simple, describen un conjunto de situaciones diferentes que pueden ser representadas por ella.

Orientaciones didácticas

A lo largo de toda la Enseñanza Básica, los números han conformado un tema muy central en la Educación Matemática. Un aspecto muy importante del desarrollo de este tópico ha sido el trabajo permanente en relación con los diferentes aspectos y usos de los números en la vida cotidiana. Al mismo tiempo, también ha sido fundamental promover el desarrollo de habilidades asociadas a los números y las operaciones que vayan más allá de la simple memorización y/o aplicación de reglas y definiciones. Así, por ejemplo, la expresión adecuada y pertinente de grandes o muy pequeñas cantidades, el cálculo aproximado, la estimación del orden de magnitud, el análisis y/o creación de estrategias de resolución de problemas, la interpretación de información cuantitativa han sido permanentemente enfatizadas en el tipo de actividades que se proponen a los alumnos y alumnas en los programas de matemáticas. En este marco, detenerse en la función de los números ha sido muy importante. Por ejemplo, en el primer ciclo se hizo visible que los números no siempre indican cantidades y se les abordó tanto como cuantificadores como ordenadores e identificadores. Posteriormente se trabajó con el orden de magnitud y se incorporaron los números decimales, cuidando siempre de establecer la función y la utilidad de los diferentes números. Aunque también se fue abordando, de manera sistemática y progresivamente más compleja, las propiedades de los números. Y, hasta ahora, siempre se trabajó con números positivos.

En este nivel se incorporan los signos a los números. Y, siguiendo el mismo enfoque que se ha desarrollado en niveles anteriores, se les aborda desde dos perspectivas: como signos que indican una posición o dirección (bajo el agua, bajo cero, etc.) y como signos que señalan a un nuevo tipo de números, con los cuales se puede operar, y pueden ser tratados propiamente como números. En este último sentido, es en el marco de la resolución de problemas por medio de ecuaciones que los números negativos y las operaciones con ellos juegan un rol muy importante y se incorporan como herramientas que permiten comprender y resolver nuevos problemas que sin ellas no sería posible enfrentar adecuadamente.

Las operaciones con números enteros negativos y positivos no revisten grandes dificultades cuando se trata de sumas y restas. En el caso de la división y la multiplicación de positivos por negativos tampoco se presentan mayores dificultades por cuanto ellas son una extensión natural de las operaciones que los alumnos y alumnas ya manejan (sumas iteradas, por ejemplo). No obstante, el caso de la multiplicación (y división) de dos números negativos genera una situación diferente, un fenómeno particular, y que no tiene un soporte directo en situaciones cotidianas o en experiencias concretas. Se trata de la regla de los signos, según la cual, multiplicar un número negativo por otro negativo arroja un resultado positivo. En este programa no se ha optado por mostrar a los estudiantes una justificación algebraica y su uso en situaciones donde su pertinencia es muy alta. En este nivel y dentro de los contextos que son pertinentes, este tema se presenta a partir de secuencias numéricas que llevan al alumno y alumna a plantearse que la única solución posible para el producto de dos números negativos es un número positivo.

En cuanto a las ecuaciones, éstas se trabajan en tres sentidos: como modelos que expresan relaciones cuantitativas entre variables, de las cuales una tiene un valor desconocido; como herramienta muy poderosa para resolver problemas en los que los procedimientos de ensayo y error, por ejemplo, son insuficientes, engorrosos, largos, inciertos. En este sentido, se ha procurado no usar las ecuaciones en situaciones en que evidentemente existen otros procedimientos muy directos para resolverlas o en que las soluciones son obvias. El tercer aspecto tiene relación con el modo de resolver las ecuaciones. El énfasis está puesto en la “resolución razonada”, basada en propiedades de las operaciones más que en la aplicación mecánica de reglas sin que sean visibles las razones de ellas.

De este modo, se puede decir que el énfasis del trabajo referido a ecuaciones está puesto en: plantear, construir una ecuación adecuada a un problema; resolver la ecuación (encontrar el valor de la incógnita); e interpretar ese resultado transformándolo y/o expresándolo como una solución adecuada y pertinente al problema.

Actividades

Actividad 1

Reconocen y analizan el uso de números positivos y negativos en información obtenida en diferentes fuentes (diarios, revistas, internet). Identifican el origen o punto de referencia, el signo y el valor absoluto de estos números.

Ejemplo

Analizan información numérica (números positivos y negativos), recopilada en diarios y revistas, en la que aparezcan temperaturas bajo cero, incrementos negativos, saldos negativos, determinando en cada caso:

- Origen o punto de referencia usado.

- Magnitud o valor absoluto.
- Signo.
- Representación en la recta numérica.

a) Ejemplos de informaciones que pueden presentar los estudiantes:

INFORMACIÓN 1

LOCALIDAD	Temperatura Mínima	Temperatura Máxima
Arica	14,0ºC	19,1ºC
Iquique	12,1ºC	17,8ºC
Calama	-0,8ºC	22,7ºC
Antofagasta	13,8ºC	18,1ºC
Copiapó	5,5ºC	21,3ºC
Vallenar	10,0ºC	20,0ºC
La Serena	7,9ºC	13,1ºC
Valparaíso	11,8ºC	13,6ºC
Pudahuel	5,3ºC	23,6ºC
Quinta Normal	7,2ºC	23,8ºC
Juan Fernández	17,9ºC	18,7ºC
Curicó	11,7ºC	19,6ºC
Chillán	14,2ºC	17,2ºC
Concepción	13,4ºC	14,7ºC
Temuco	14,6ºC	18,8ºC
Valdivia	7,8ºC	17,4ºC
Osorno	7,0ºC	16,0ºC
Puerto Montt	6,2ºC	14,6ºC
Coyhaique	-3,8ºC	2,8ºC
Balmaceda	-8,1ºC	1,3ºC
Punta Arenas	0,0ºC	6,3ºC

Preguntas que pueden responder a propósito de la información:

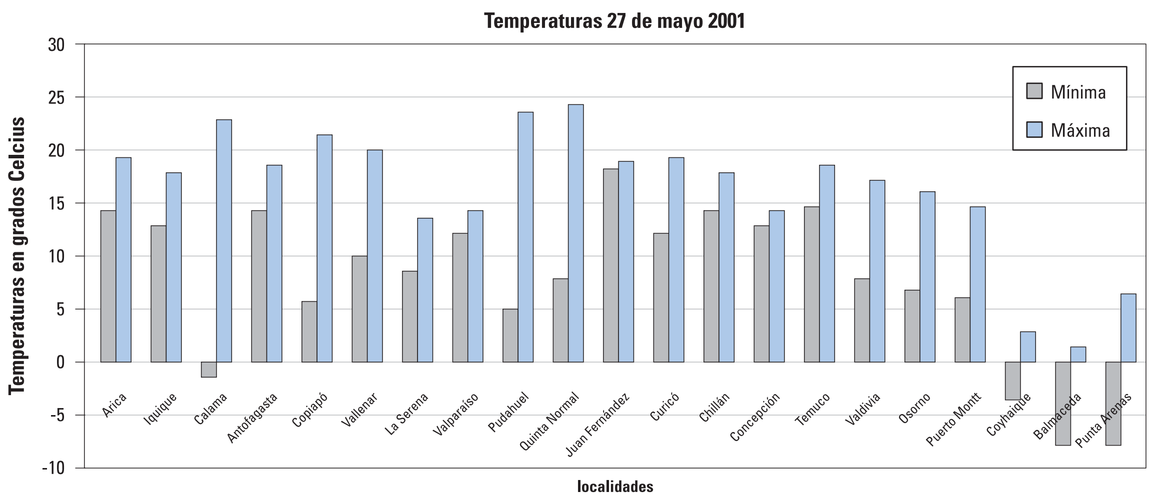
- ¿Cuál es la ciudad señalada en la información que tuvo en algún momento del día la temperatura más baja? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué indica el signo negativo en ese caso? ¿Qué indica el número (valor numérico)?
- ¿Cuál es la localidad señalada en la información que tuvo en algún momento del día la temperatura más alta? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué indica el número (valor numérico)? ¿Por qué no tiene signo? Si tuvieras que ponerle un signo, ¿cuál le pondrías?
- ¿Qué indica el cero en esa información? ¿Qué relación tiene el cero con las temperaturas con signo positivo? Y ¿cuál con las de signo negativo? ¿El cero lleva signo?

- De acuerdo a los valores registrados para las temperaturas mínimas y máximas y a lo que sabes de las regiones del país, ¿cómo crees que son las condiciones de vida en ellas? Selecciona algunas de estas regiones y haz un comentario.

COMENTARIO

La información presentada en el ejemplo fue extraída desde el sitio web: http://www.meteochile.cl. También se puede obtener información en el sitio: http://www.weather.com, que contiene información de temperaturas expresadas en grados Farenheit y un convertor a grados Celsius, lo cual ayuda a abordar las actividades que vienen a continuación en relación con la relatividad del cero en este tipo de escala.

Una actividad que puede aportar a la representación de las temperaturas, en especial para visualizar las temperaturas bajo cero en relación con las sobre cero, es realizar gráficos en el programa Excel. Así se puede escoger el mejor gráfico que represente la información. Por ejemplo:



Otro tipo de información muy interesante de abordar, ya que en ella se utilizan números positivos y negativos es la referida a los husos horarios que en el meridiano de Greenwich corresponde al cero como eje de referencia. Ver el sitio web http://greenwichmeantime.com/

INFORMACIÓN 2

Listado de afirmaciones usadas en la vida cotidiana y que incluyen números positivos y negativos.

El IPSA de ayer de la Bolsa de Comercio de Santiago fue de -1,5 mientras que la semana pasada fue de 0,7.

El mar Mediterráneo tiene una profundidad máxima de aproximadamente 5.000 m, mientras que el volcán activo Popocatépetl, ubicado en México, tiene una altura equivalente sobre el nivel del mar.

El IPC registrado el mes de febrero de 2001 fue de - 0,3, mientras que el del mes de enero fue de 0,3.

El informe anual de los resultados obtenidos por las empresas muestra que la empresa que obtuvo una ganancia mayor el año pasado fue de un 5,3% mientras que una de las empresas con peores resultados obtuvo un porcentaje de - 14,3.

Preguntas que pueden responder a propósito de la información:

- ¿Qué significa el signo negativo delante del número en cada afirmación? ¿En relación a qué se antepone el signo negativo? Entonces, ¿qué indica el cero?
- ¿Qué significa el valor numérico en cada caso?
- En el caso de las alturas y profundidades, si sólo se presenta un listado sin indicar si es sobre el mar o bajo el mar, ¿para qué serviría el signo delante del valor numérico? Entonces, ¿cómo escribirías la máxima profundidad del mar Mediterráneo?, ¿qué signo le pondrías para diferenciarlo de la altura del volcán?

Con ayuda de la profesora o profesor realizan una síntesis de las preguntas anteriores de manera de caracterizar los números en relación con el signo, el valor numérico y el punto de referencia u origen.

b) Ubican en una recta numérica los números indicados en la información.
Analizan aspectos importantes a considerar en la representación de números en una recta numérica. Discuten sobre la importancia del punto de referencia, el signo asociado a cada sentido de la dirección y la distancia del número al origen o punto de referencia. Asocian la distancia al origen con la noción del valor numérico.

c) Discuten sobre los contextos reales en los que aparecen o se usan los números negativos. Determinan las magnitudes que representan los números y su relación con el signo.

Establecen conclusiones en torno a los dos tipos de números que tienen signo y que se encuentran presentes en la información recolectada. Clasifican la información obtenida entre aquella que presenta números decimales y aquella en la cual aparecen cantidades enteras; observan el tipo de información en que se usa cada tipo de números y las diferentes escalas utilizadas (escalas que permiten expresar cantidades no enteras, como la temperatura, o escalas como las líneas de tiempo que sólo expresan las cantidades enteras).

COMENTARIO

El objetivo principal de esta actividad es que los alumnos y las alumnas reconozcan en la realidad los números positivos y negativos y a partir de ello interpreten informaciones que contienen este tipo de números. Es importante que den significado a los números que aparecen en las informaciones recopiladas para entender su uso. En segundo lugar, que determinen los aspectos importantes a considerar en la ubicación de estos números en la recta numérica y, a partir de ello, que identifiquen las tres características comunes de estos números: signo, punto de referencia u origen y magnitud que representan y, por tanto, valor absoluto. Finalmente, a partir de la variada información recolectada, que incluya tanto números decimales (por ejemplo, las temperaturas) como naturales, deben observar que ambos pueden tener signo negativo. Las escalas de datos discretos, que se aplican en situaciones como la línea de tiempo, se pueden asociar a $\mathbb{Z}$; y las escalas de datos continuos, que se utilizan en situaciones como la graduación de temperaturas, a $\mathbb{Q}$.

Actividad 2

En situaciones variadas en las que se utilizan números negativos analizan la posibilidad de cambiar el punto de referencia u origen. Determinan puntos de referencia y los varían para establecer distintas posiciones en relación con el nuevo origen.

Ejemplo

Analizan las siguientes situaciones:

La temperatura máxima de hoy fue de 28,6º C.

La temperatura máxima de hoy en Miami fue de 45º F.

El auto está estacionado en el nivel -2.

El estado de cuenta de la señora Flores indica -5.876 pesos.

El IPSA de ayer de la Bolsa de Comercio de Santiago fue de - 1,54.

El descubrimiento de América fue el año 1492 de la era cristiana.

En el mundo islámico están en el año 1379.

El mar Mediterráneo tiene una profundidad máxima de 5.020 m.

La Cordillera de Los Andes, que nace en las costas del Caribe y termina en Tierra del Fuego, alcanza su altura máxima en El Aconcagua a los 6.959 m.

La ciudad capital más alta del mundo es La Paz y se encuentra a 3.627 m de altura.

La Pirámide de Keops mide 139 m, mientras que la torre Eiffel mide 300 m de altura.

a) Establecen e interpretan el origen o punto de referencia de cada una de las situaciones. Asocian este punto de referencia al cero. Para cada situación representan los datos en rectas numéricas.

b) Investigan sobre los distintos calendarios, las distintas escalas de medición de temperatura, altitud, etc. En cada caso averiguan el significado del cero como origen o punto de referencia y, en las que es posible, establecen equivalencias entre las escalas. Por ejemplo, transforman las medidas de temperaturas a una escala común (°C o °F) y las agregan a las ya ubicadas en la letra a) de esta misma actividad.

Comentan la relatividad del cero en ambas escalas, orientados por preguntas como:

- ¿Qué significa el cero en cada escala?
- ¿En cuál de ellas preferirías expresar estas medidas? ¿Por qué?

Asocian estas informaciones a escalas en la cuales el cero es relativo y depende de una convención o de un hecho determinado.

c) En las informaciones relativas a cantidades de dinero que se tiene o que se debe en la cuenta corriente, observan el significado del cero, respondiendo preguntas como:

- ¿Qué significa en ese caso que se tenga cero pesos en la cuenta?
- Por lo tanto, en ese contexto de presencia o ausencia de dinero, ¿es posible que el cero tenga una posición relativa?
- Proponen otras informaciones en las cuales el cero corresponda a ausencia de algo y por lo tanto no es arbitrario.
- Clasifican las situaciones en función de la posibilidad de cambiar el punto de referencia u origen.
- Establecen conclusiones en torno a la conveniencia o utilidad de usar un punto de referencia relativo o absoluto y cuáles escalas los incluyen.

COMENTARIO

Es importante que las situaciones presentadas consideren tanto la escala asociada a números enteros como a números decimales y fracciones (positivas y negativas). En el ejemplo se presentan ambos tipos, en las temperaturas se muestra que un punto de referencia u origen puede ser relativo o absoluto independientemente de la escala o conjunto numérico al que se le asocie.

Es importante considerar que cuando el origen o punto de referencia de una escala es absoluto significa que indica ausencia de elementos o cardinalidad nula, en cambio si éste es relativo no significa ausencia, sino que es arbitrario dado por alguna convención.

Actividad 3

Interpretan situaciones en las que se utilizan números positivos y negativos, buscan representar datos, establecen comparaciones utilizando un sistema de referencia asociado a una recta numérica. Establecen reglas generales respecto del orden de números positivos y negativos.

Ejemplo

Organizados en grupos, analizan información recolectada anteriormente por ellos y otras entregadas en la clase:

a) Organizan la siguiente información referida a hitos históricos y fechas importantes:

- *El año 1492 corresponde al año del descubrimiento de América y al comienzo de los tiempos modernos.*
- *La invención de la escritura data del año 3000 aC.*
- *El año 476 dC marca el fin de la Edad Antigua.*
- *En el año 1789 se produjo la Revolución Francesa.*
- *La Segunda Guerra Mundial finalizó el año 1945.*
- *Los primeros desarrollos de la agricultura están fechados aproximadamente en el 8000 aC.*
- *Los primeros útiles de greda datan del año 2.500.000 aC.*

Comentan sobre las fechas de la información entregada, el significado de la expresión "antes de Cristo" y "después de Cristo" y su utilidad para ubicar hechos históricos. Organizan la información en líneas de tiempo y agregan otros datos obtenidos en el subsector Estudio y Comprensión de la Sociedad. Contestan preguntas como las siguientes:

- De los hitos históricos presentados, ¿cuál es el más reciente y cuál el menos reciente?
- Considerando las fechas anteriores al nacimiento de Cristo, ¿cuál sería la menos reciente? ¿Cuál es el orden de estos hechos históricos?
- Considerando las fechas posteriores al nacimiento de Cristo, ¿cuál sería la menos reciente y la más reciente?, ¿qué lugar ocupa la fecha en que se produjo la Revolución Francesa?, ¿cuál es el orden de estos hechos históricos?
- ¿Qué hecho representaría el año cero?

COMENTARIO

A propósito de estos hechos históricos se puede desarrollar una reflexión con los estudiantes en torno a las repercusiones de estos acontecimientos y así dar oportunidad de entregar opiniones fundadas.

b) Ordenan la información en tablas y en rectas numéricas. Agregan otros números en la recta numérica y determinan dónde se ubican.

Observan los números ubicados en la recta y establecen conclusiones en torno a las reglas generales del orden entre números con signo, respondiendo a las interrogantes:

- ¿Cómo se establece el orden entre dos números de signo positivo?
- ¿Cómo se establece el orden entre un número positivo y otro negativo?
- ¿Y entre dos números negativos?

COMENTARIO

El objetivo central de esta actividad es determinar las reglas generales del orden apoyándose en la recta numérica. En el ejemplo se ha abordado la actividad para números que expresan cantidades enteras. Se sugiere realizar lo mismo con alguna información trabajada en las actividades anteriores y que presente números decimales y fracciones (positivos y negativos), como en el caso de las temperaturas. Se sugiere que, al igual que en el ejemplo presentado, se establezca un orden de los números basándose en la recta numérica.

Al abordar ambos tipos de números, enteros y decimales y fracciones (positivos y negativos), apoyar a los estudiantes a observar las diferencias entre ambos, en el sentido de la densidad, es decir, entre dos números decimales y fracciones (positivos y negativos) es posible intercalar un tercero; en cambio, entre dos enteros sucesivos eso no es posible y, como consecuencia, en los números enteros es posible identificar el sucesor y antecesor de un número, no así en los decimales y fracciones (positivos y negativos).

Actividad 4

Desarrollan juegos, problemas, secuencias numéricas en los que se requiera resolver adiciones de números positivos y negativos. Comparan procedimientos, interpretan y evalúan respuestas. Establecen reglas generales de la adición de números positivos y negativos.

Ejemplo

Organizados en grupos, desarrollan diversas acciones que llevan al análisis de la adición de números positivos y negativos.

Juegan con naipes a sacar parejas de cartas siguiendo las instrucciones que a continuación se detallan:

Materiales por grupo:

1 set de naipe inglés, con las cartas del 1 al 13 de pintas rojas y negras y los comodines (4 cartas). Las cartas rojas indicarán puntos positivos, las negras negativos y a los comodines se les asignará el valor del cero.

1 set de tarjetas con números desde +13 a -13, incluyendo el cero.

Instrucciones:

- Se reparten las cartas **del naipe inglés** entre los 4 integrantes del grupo.
- Después se da vuelta una de **las tarjetas** que indica el número de puntos que se debe obtener.
- Todos los jugadores al mismo tiempo seleccionan entre las cartas recibidas dos naipes con los cuales se pueda obtener, en total, el número indicado en la tarjeta. Este total se obtiene al compensar los puntos de ambas cartas, por ejemplo, si la tarjeta indica $\boxed{-2}$ puede obtenerse con dos naipes negros (de valor 1); con un naipe rojo y otro negro (5 negro y 3 rojo) o con el naipe que representa el cero y un naipe negro (negro 2).

  Esta acción es contra el tiempo y el que encuentra las dos cartas que cumplan la condición las presenta al centro de la mesa y las descarta.

  Todos los integrantes pueden botar cartas mientras dure el tiempo acordado para ello.
- Se revisan las parejas de cartas encontradas para ese valor y se registran en una tabla.
- En cada vuelta del juego se muestra una nueva tarjeta que indica el número a obtener y se repiten los dos pasos anteriores.

Meta

Gana el jugador que ha logrado botar mayor cantidad de parejas de cartas.

- Asocian la acción de compensar puntos para obtener el puntaje pedido con una adición de números con signo y observan la tabla con los resultados del juego.

  La tabla puede ser como la siguiente:

Puntaje requerido o resultado de la suma	Parejas de cartas o sumandos encontrados			
0				
+1				
+2				
etc				

- Analizan los datos obtenidos, reflexionan sobre el caso de la suma igual a cero. Y también en aquellas en las que interviene el cero como sumando. Algunas preguntas pueden ser:
  - ¿En cuáles adiciones se suma cero? ¿Cuál es su resultado? ¿Qué sucede cuando a un número negativo se le suma cero? ¿Y cuándo a un número positivo se le suma cero?
  - Por otra parte: si el resultado es cero, ¿cuál es el valor de las cartas? ¿Existen otras posibilidades con estas cartas? ¿Y con otros números? ¿Cuál es la característica de esos dos números?

- Continúan el análisis para aquellos números en los que los resultados son positivos, se orientan por preguntas como:
  - Si el resultado pedido es +1 y se tienen tarjetas rojas y negras, ¿cuál es la característica que deben cumplir los naipes? ¿Y si es +2? ¿Y si es +3?
  - Entonces, si el resultado pedido es positivo y se tiene un número positivo y uno negativo, ¿qué número debe ser mayor?
  - Si las dos tarjetas son rojas, ¿cuál sería la conclusión? ¿Es posible obtener un resultado positivo sólo con tarjetas negras?

- Repiten el análisis para aquellos números en los que los resultados son negativos. Se orientan por preguntas como:
  - Si el resultado pedido es -1 y se cuenta con una tarjeta negra y otra roja ¿cuál es la característica que deben cumplir los naipes? ¿Y si es -2? ¿Y si es -3?
  - Entonces, si el resultado pedido es negativo y se tiene un número positivo y uno negativo, ¿qué número debe ser mayor? (el valor absoluto).
  - Si las dos tarjetas son negras, ¿cuál sería la conclusión? ¿Es posible obtener un resultado negativo sólo con tarjetas rojas?
  - Entonces, si tienen dos números negativos, ¿cómo deben ser éstos para obtener el número negativo deseado?

COMENTARIO

El análisis de los datos obtenidos tiene como foco detenerse en la caracterización de la adición como operación usando estos números con signo (enteros, en este caso), ya que los estudiantes conocen la adición en los números naturales y la tienen asociada a diferentes acciones, significados y cómo se opera con ellos. Entonces, teniendo como base ese aprendizaje ponen a prueba el comportamiento de esta operación con números con signo. De ahí la importancia del análisis de ejercicios en los cuales se destaquen las propiedades de la adición de números negativos. ¿Qué papel tiene el cero en este nuevo contexto?, ¿para qué sirve? ¿Es posible seguir sumando los mismos números, no importando el orden en el cual se realice?

Es un buen momento para abordar el opuesto de un número, las preguntas orientadas al análisis del cero como resultado tienen esta finalidad. Apoyarse en la idea de compensación sirve para reforzar la idea de números opuestos y simétricos respecto del punto de origen.

Para reforzar la idea de opuesto se puede pedir, con apoyo de la recta numérica, completar frases como las siguientes:

Juan obtuvo -5 puntos en el juego, si en el próximo juego obtiene ____ puntos su puntaje total será 0.

En el estado de cuenta de Felipe aparece $-35.000, tiene que depositar _____ para pagar su deuda y quedar con $0.

Colo-Colo tenía 3 goles a favor pero en el último partido perdió por ____ goles a 0 y ahora tiene 0 goles a favor y 0 en contra.

Javiera dio 10 pasos hacia mí (+ 10) y luego dio ______ pasos en sentido contrario (_____) para ubicarse en el lugar inicial.

Francisca en un viaje utilizó su tarjeta de crédito, tiene una deuda de 280,54 dólares incluidos los intereses, debe pagar ___________ dólares para saldar su deuda.

- Resuelven problemas como los siguientes, se apoyan en la recta numérica para su solución:

  Durante estos últimos días se han registrado las temperaturas cada media hora y los resultados obtenidos ayer fueron los siguientes: la temperatura mínima fue -2,3 °C y se registró a las 5:30 horas. De ahí en adelante la temperatura subió un grado cada media hora entre las 5:30 y las 8:00 horas. ¿Qué temperatura se registró a las 8:00 de la mañana?

  Según los datos con que contamos actualmente, la escritura se inventó alrededor del año 3000 aC, y 1200 años después en Babilonia se utilizaba un sistema de numeración posicional de base 60. ¿Alrededor de qué año los babilonios utilizaban este sistema de numeración?

- Buscan diversas estrategias para resolver los problemas presentados.

- Interpretan y evalúan los resultados obtenidos.

- Intercambian procedimientos y comparan respuestas.

COMENTARIO

En el problema de las temperaturas, se están sumando números que corresponden a alzas de temperaturas que se miden en una escala continua, a diferencia de las sumas realizadas en los juegos con naipes pues los puntos corresponden a sumar cardinales. En el caso de las líneas de tiempo se pide “desplazarse” en ella, acción que se asemeja a la realizada en una recta numérica.

- Completan secuencias numéricas explicando el patrón numérico que permite completarlas.

20 + 20 =	-3 + 4 =	2,5 + 2,5 =	-0,23 + 1 =
20 + 10 =	-3 + 3 =	2,5 + 2 =	-0,23 + 0,7 =
20 + 0 =	-3 + 2 =	2,5 + 1,5 =	-0,23 + 0,4 =
20 + -10 =	-3 + 1 =	2,5 + 1 =	-0,23 + 0,1 =
20 + -20 =	-3 + 0 =	2,5 + 0,5 =	-0,23 + -0,2 =
20 + -30 =	-3 + -1 =	2,5 + 0 =	-0,23 + -0,5 =
20 + -40 =	-3 + -2 =	2,5 + -0,5 =	-0,23 + -0,8 =
20 + -50 =	-3 + -3 =	2,5 + -1 =	-0,23 + -1,1 =
20 + -60 =	-3 + -4 =	2,5 + -1,5 =	-0,23 + -1,4 =

- Discuten sobre los resultados obtenidos en las secuencias anteriores. Responden preguntas tales como:
  - ¿Qué resultado se obtiene al sumar cero a un número positivo o negativo?
  - ¿Qué resultado se obtiene al sumar un número positivo o negativo con su opuesto?
- Seleccionan una secuencia de las presentadas, toman cualquier primer término de ella y lo modifican generando los otros términos al disminuir el primer sumando en vez del segundo. La cantidad en la cual se debe disminuir depende del patrón de la secuencia original (por ejemplo: 20 + -10 ó 10 + - 10 ó etc.)

  Observan los resultados que se obtienen y responden: ¿Qué relación tiene esta nueva secuencia con la original? ¿Se obtienen los mismos resultados? ¿Por qué crees que sucede esto? ¿Tiene relación con alguna propiedad que conozcas?
- Establecen las reglas generales para sumar números positivos y negativos: ¿Qué sucede cuando se suman dos números de igual signo? ¿Qué sucede cuando se suman números de signo diferente?, ¿en ese caso, cómo se obtiene el total?

COMENTARIO

El objetivo de esta parte es que, a través de las secuencias, se establezcan las reglas generales para sumar números positivos y negativos, independientemente de que éstos sean enteros o decimales o fracciones (positivos y negativos). Además, a partir del análisis de los resultados obtenidos, sacar conclusiones sobre algunas de las propiedades de la adición. Se sugiere realizar algunas secuencias con tres números e incentivar en los estudiantes el cuestionamiento sobre la suma de tres o más números positivos y negativos, y sobre la asociatividad.

Actividad 5

Resuelven problemas diversos que impliquen restar números positivos y negativos. Comparan procedimientos, interpretan y evalúan respuestas. Establecen reglas generales de la sustracción de números positivos y negativos.

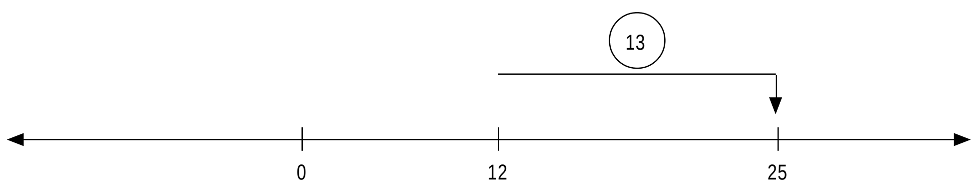
Ejemplo

Leen los siguientes datos sobre temperaturas máximas y mínimas y realizan las actividades que se señalan:

a) Las temperaturas máximas y mínimas de tres diferentes días fueron las siguientes:

Temperatura mínima	Temperatura máxima
12º	25º
15º	27º
10º	23º

- ¿Cómo se calcula habitualmente la diferencia de temperaturas en un día?
- Representan en una recta numérica, como se muestra a continuación, el resultado de la diferencia de temperatura en cada día.



COMENTARIO

Utilizar el cálculo de diferencias de temperaturas no permite abordar todos los casos (que son cuatro). El último de ellos se trabaja en la parte (e) de este mismo ejemplo. Sin embargo, es sabido que para calcular la diferencia de temperaturas habitualmente se resta la mínima a la máxima.

Se propone comenzar con pares de números positivos con el fin de aprovechar lo que los alumnos y alumnas conocen y saben resolver; y, de este modo, ir paso a paso, haciendo visibles las situaciones particulares y las reglas que se determinan al operar con números negativos.

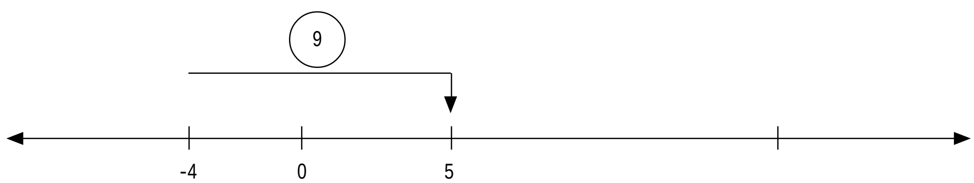
- Escriben las operaciones aritméticas que permiten encontrar los resultados. Por ejemplo, en el primer caso

  25 - 12 = 13

b) Encuentran la diferencia entre la máxima y la mínima en los siguientes tres casos:

Temperatura mínima	Temperatura máxima
0º	10º
-4º	5º
-8º	3º

- Discuten sobre cómo calcular en estos casos y analizan las diferencias entre éstos y los casos anteriores.
- Realizan los cálculos apoyándose en una representación gráfica como la siguiente:



- Escriben las operaciones correspondientes. Es decir, temperatura máxima menos temperatura mínima igual al incremento de temperatura.

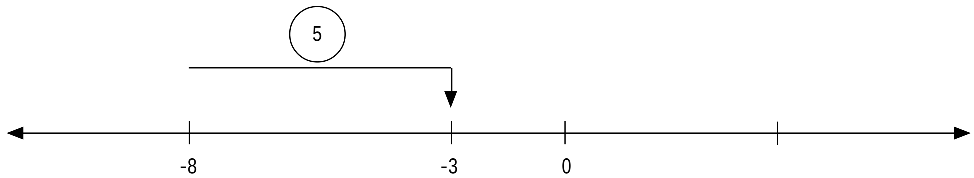
5 - (-4) = 9

c) Encuentran la diferencia entre la máxima y la mínima en los siguientes tres casos:

Temperatura mínima	Temperatura máxima
-8º	-3º
-4º	0º
-10º	-1º

- Discuten sobre cómo calcular en estos casos y analizan las diferencias entre éstos y los casos anteriores.

- Realizan los cálculos apoyándose en una representación gráfica como la siguiente:



- Escriben las operaciones correspondientes. Es decir, temperatura máxima menos temperatura mínima igual al incremento de temperatura.

  -3 - (-8) = 5

d) Reúnen en una sola tabla todos los casos e incluyen las operaciones correspondientes.

Temperatura mínima	Temperatura máxima	Operación
12	25	25 – 12 = 13
15	27	27 – 15 = 12
10	23	23 – 10 = 13
0	10	10 – 0 = 10
-4	5	5 – (-4) = 9
-8	3	3 – (-8) = 11
-8	-3	-3 – (-8) = 5
-4	0	0 – (-4) = 4
-10	-1	-1 – (-10) = 9

- Analizan los diferentes casos, las operaciones y los resultados y enuncian reglas para la sustracción.

COMENTARIO

Es importante no entregar a priori reglas como “restar dos números negativos...” sino que apoyar la observación de los alumnos y alumnas de los diferentes casos y que hagan las asociaciones correspondientes entre la adición y la sustracción. Por otra parte, es importante también que redacten en su propio lenguaje las conclusiones, velando el profesor o profesora por que éstas no contengan errores.

Como se señaló anteriormente, el caso de las temperaturas no cubre todas las posibilidades. Con el fin de completarlos, se propone una última parte en la cual se plantean ejercicios numéricos que para ser resueltos se asocian con adiciones en que hay un término desconocido.

e) En la situación anterior hay algunos casos que no se analizaron. Leen las siguientes proposiciones y las analizan:

- No hay ningún caso de sustracción en que el minuendo sea menor que el sustraendo.

  ¿Cómo se podría encontrar el resultado de, por ejemplo, 14-18?

  Calcular 14-18 equivale a encontrar un número que sumado a 18 dé como resultado 14. Es decir:

  18 + $\boxed{}$ = 14 ¿Cuál es ese número?

COMENTARIO

Si los alumnos y alumnas no visualizan esta relación, mostrarles ejemplos como 5-3=2 que equivale a encontrar un número que sumado a 2 dé como resultado 5, es decir, en este caso, 3. En el ejemplo, 18+(-4)=14

- ¿Cómo se podría resolver -5-7?
- ¿Cómo se podría resolver -4-(-2)?
- Completan tablas como las siguientes, las analizan y agregan a sus enunciados anteriores las nuevas conclusiones.

5 – 1	=	4
4 – 2	=	2
3 – 3	=	0
2 – 4	=	-2
1 – 5	=	-4
0 – 6	=	-6
-1 – 7	=	-8
-2 – 8	=	-10

5 – 1	=	4
4 – 0	=	4
3 – (-1)	=	4
2 – (-2)	=	4
1 – (-3)	=	4
0 – (-4)	=	4
-1 –(-5)	=	4
-2 –(-6)	=	4

Actividad 6

Resuelven problemas que impliquen en sus soluciones multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos. Interpretan y evalúan la respuesta. Establecen reglas generales de la multiplicación de números positivos y negativos.

Ejemplo

Resuelven las siguientes situaciones y ponen en común sus respuestas.

a) Al final de 10 juegos cada uno de los jugadores ha obtenido los siguientes puntajes:

Fernanda ha obtenido en cada una de las etapas del juego 30 puntos.
Sebastián en cambio ha obtenido -15 puntos en cada etapa.
Gervasio ha obtenido siempre lo mismo y al final contabiliza 200.
Lucía, en cambio, tiene un total de -90 puntos y en cada etapa obtuvo igual cantidad de puntos.

- ¿Cuál ha sido el puntaje total de Fernanda y de Sebastián?
- ¿Cuál es el orden de los jugadores comenzando por el ganador y terminando con el perdedor?
- ¿Qué puntaje obtuvieron en cada etapa Gervasio y Lucía?
- Analizan los ejercicios que pueden dar solución a cada pregunta, ya sea adiciones iteradas o una multiplicación, restas iteradas o una división. Concluyen sobre la multiplicación y la división de números positivos y negativos cuando uno de los términos es negativo y el otro positivo.

COMENTARIO

Esta primera parte de la actividad apunta a que se introduzca a los estudiantes en la problemática de la multiplicación y división de un número positivo y uno negativo. Se espera que el análisis, primero a partir de situaciones y luego sólo numérico, permita verificar que en la multiplicación es posible conmutar los factores; por lo tanto, el factor positivo siempre puede ser interpretado como las veces que se repite como sumando el otro número, en este caso uno negativo.

En lo que corresponde a la división, a partir de algún caso de los problemas como: -90 : 10 = -9, se debe discutir aquellas en las cuales el número negativo es el divisor, planteando un ejercicio como:

90 : - 10 =

Aquí no es posible conmutar los términos, pero haciendo una relación con la multiplicación y apelando a la consistencia en los razonamientos, se concluye que el cuociente es -9, porque - 9 • -10 = 90

b) Se preguntan sobre cuál es el caso de multiplicación y de división con números positivos y negativos que aún no se ha abordado. Establecen que se trata de la multiplicación y la división con números negativos y completan secuencias como estas:

7 • 3 =	-8 • 5 =	-3,1 • 2 =	-4 • 1,5 =	20 : 5 =	-2,4 : 8 =	-30 : 3 =
7 • 2 =	-8 • 4 =	-3,1 • 1 =	-4 • 1 =	20 : 4 =	-2,4 : 6 =	-30 : 2 =
7 • 1 =	-8 • 3 =	-3,1 • 0 =	-4 • 0,5 =	20 : 3 =	-2,4 : 4 =	-30 : 1 =
7 • 0 =	-8 • 2 =	-3,1 • -1 =	-4 • 0 =	20 : 2 =	-2,4 : 2 =	-30 : -1 =
7 • -1 =	-8 • 1 =	-3,1 • -2 =	-4 • -0,5 =	20 : 1 =	-2,4 : -2 =	-30 : -2 =
7 • -2 =	-8 • 0 =	-3,1 • -3 =	-4 • -1 =	20 : -1 =	-2,4 : -4 =	-30 : -3 =
7 • -3 =	-8 • -1 =	-3,1 • -4 =	-4 • -1,5 =	20 : -2 =	-2,4 : -6 =	-30 : -4 =
7 • -4 =	-8 • -2 =	-3,1 • -5 =	-4 • -2 =	20 : -3 =	-2,4 : -8 =	-30 : -5 =

- Hacen una síntesis de los diferentes casos de la multiplicación y división, justificando estos últimos a través de la multiplicación.

COMENTARIO

El caso de la multiplicación de un número negativo por otro negativo requiere de una justificación algebraica. Sin embargo, a este nivel, se ha optado por la presentación de secuencias numéricas que lleven al alumno y alumna a plantearse que **la única solución posible** es un número positivo. Probablemente en ellos surja la inquietud con respecto a cómo es posible que tanto al multiplicar dos números negativos como dos números positivos el resultado sea positivo. Entonces, es válida la contra pregunta ¿si no es así, cuál otra respuesta es posible de manera que se mantenga la coherencia con todos los otros casos de multiplicación?

Lo mismo para la división, pues el análisis de las divisiones puede ser justificado en torno a la multiplicación.

Suponiendo que fuese cierto que -30 : -5 = 6, entonces ¿se mantiene la coherencia en la multiplicación de manera que 6 • -5 =-30? La respuesta obvia es sí, se mantiene la coherencia en la multiplicación. Luego, se puede aceptar que de la división de dos números negativos se obtenga un número positivo.

c) Realizan con ayuda del docente una síntesis sobre el comportamiento de la adición, sustracción, multiplicación y división con distintos tipos de números. Comentan y reflexionan cómo va surgiendo la necesidad de obtener nuevos tipos de números a partir de la imposibilidad de encontrar respuestas a la sustracción y la división con los números naturales.

Parten el análisis usando números naturales para seguir con otros números que conocen. Se plantean preguntas como las siguientes, que orienten la discusión:

- Recurren a los primeros números que han conocido y usado en la Educación Básica, los números naturales, y responden: ¿qué operaciones podían resolver con ellos sin ninguna restricción? Dan un ejemplo en cada caso.
- Con los números naturales, ¿era posible encontrar el resultado, por ejemplo, de 4 - 5 ?; ¿era posible encontrar el resultado exacto de la repartición de 5 : 2?, ¿de la división 2 : 5 (por ejemplo, dos chocolates repartidos entre 5 niños) y de 1 : 3?
- ¿Qué números son necesarios para abordar las operaciones anteriores?
- Si con las sustracciones planteadas anteriormente se hacen necesarios los números enteros, al usar estos nuevos números ¿es posible resolver -1 : 2?

  Se establece el nombre de cada tipo de números que se ha generado para encontrar las respuestas a estas operaciones y su suficiencia para encontrarlas.

COMENTARIO

El objetivo de esta parte de la actividad es hacer una síntesis final de todos los problemas que los estudiantes han enfrentado durante la Educación Básica en relación con las operaciones, y cómo éstos han dado paso al conocimiento de otros números, ya sean los naturales, decimales y, durante este año, los enteros y decimales y fracciones (positivos y negativos), que permiten realizar algunas operaciones que no era posible con los números ya conocidos. Es decir, permiten responder a otras cuestiones.

Es importante observar que en la respuesta a cada operación surge un tipo de números que a su vez es suficiente para abordar las operaciones ya “solucionadas.” Entonces para abordar la respuesta de cualquier sustracción en la cual los términos son números naturales, son suficientes los números enteros; para abordar la respuesta a cualquier división, incluyendo aquellas en las cuales uno de sus términos es negativo, surgen los números racionales. Estos últimos son suficientes para abordar la respuesta a las cuatro operaciones básicas.

Actividad 7

Resuelven problemas en los cuales se deben encontrar los términos desconocidos para abordar la respuesta y experimentan la necesidad de expresar el valor con una letra o incógnita.

Ejemplo

Buscan estrategias para resolver problemas como los siguientes:

Un halcón posado en la rama de un árbol observa el paso de una bandada de palomas y les dice: "¡Adiós, cien palomas!", saludo al que las palomas responden: "se equivoca, señor halcón, no somos cien. Nosotras, más otras tantas como nosotras, más la mitad, más la cuarta parte, más Ud., señor halcón, somos cien". ¿Cuántas palomas había en la bandada?

- Intercambian resultados y comparan estrategias.
- Comentan las dificultades que se les presentaron en el trabajo de encontrar el valor desconocido.
- Concluyen en la necesidad de utilizar una letra para representar los términos desconocidos y poder manipular las cantidades involucradas en el problema.

COMENTARIO

El propósito de esta actividad es que los estudiantes se enfrenten a problemas que no saben resolver y que busquen distintas estrategias que les permitan encontrar el valor del término desconocido. A través de una exploración vía ensayo y error, pueden encontrar la solución a este problema. El intercambio y comparación de estrategias tiene el objetivo de que comenten sobre las dificultades e inconvenientes que tiene buscar un número que cumple ciertas condiciones a través de un método de ensayo y error. Discuten sobre la conveniencia de suponer que el número buscado es x (o cualquier letra que simbolice la incógnita) y a partir de ello hacen algunas manipulaciones aritméticas.

Actividad 8

Utilizan letras para representar la incógnita de una situación verbal; generan sus términos y establecen una ecuación (igualdad). Evalúan expresiones algebraicas simples en la cual la incógnita representa un valor numérico.

Ejemplo

a) Leen los siguientes enunciados verbales en contextos numéricos y geométricos, generan expresiones algebraicas simples e interpretan el significado de otras relativas a ese contexto.

- *x* representa la longitud de un trazo en cm:

  ¿Cómo expreso el doble de la longitud del trazo? ¿Y que el trazo aumentó 5 cm?

  ¿Qué significa (x + 2) cm?, ¿y (x - 5) cm?, ¿y (2x+3) cm?

- *x* representa el valor de un libro:

  ¿Cómo se expresa la mitad del precio del libro? ¿Y cómo represento 25% del valor del libro?

  ¿Qué significa 3x? ¿Qué significa x + x + x?, ¿ $\frac{3}{4}x$?

b) Leen expresiones algebraicas simples, las interpretan en relación al contexto.

- *y* representa el dinero en pesos que invierte una persona y la expresión (3y + 8) pesos la cantidad total obtenida luego de realizar el negocio. ¿Qué significa esta expresión en pesos respecto de la cantidad de dinero invertida *y*?, ¿cuánto dinero representa la expresión (3y + 8) cuando y = 1, o cuando y = 3?

COMENTARIO

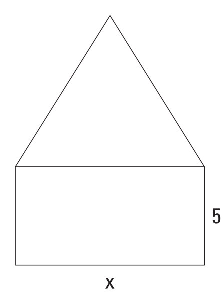
El foco de atención de esta actividad es que los estudiantes interpreten expresiones algebraicas en contextos geométricos y numéricos, y que evalúen estas expresiones, dados ciertos valores para la incógnita. Es importante que reflexionen en los casos en que al evaluar el resultado se obtienen números negativos y esto no concuerda con el contexto en el que se sitúa la expresión como, por ejemplo, la longitud de un trazo o la edad de una persona; en cambio, sí es posible obtener un valor negativo como resultado de una inversión en pesos, ya que refleja la pérdida de dinero. También es importante llevar a los estudiantes a reflexionar sobre el significado de expresiones como 6x, interpretándolas como “seis veces x” o “6 por x”.

c) Plantean ecuaciones a partir de enunciados simples que implican una igualdad con una incógnita. Leen el siguiente problema y van respondiendo las preguntas sugeridas:

Raúl le dice a María: Adivina el número que estoy pensando, las pistas son: a ese número le agrego 1 y luego multiplico el resultado por 5 y se obtiene -30.

- ¿Cuál es el número?
- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Qué es el -30? Entonces, ¿cuáles pueden ser las dos partes de la ecuación separadas por el signo igual?

En la figura que se muestra a continuación, el triángulo es equilátero. ¿Cuál es el valor de x *de manera que el perímetro del triángulo sea el mismo que el perímetro del rectángulo? ¿Cuál es el perímetro del triángulo?*



- ¿Qué relación tiene el lado de mayor longitud del rectángulo con el lado del triángulo equilátero? Entonces, ¿cómo se puede expresar el perímetro del triángulo equilátero?
- ¿Cómo se puede expresar el perímetro del rectángulo? Simplifican esa expresión sumando los números con los números y las letras con las letras.
- Expresan con palabras cuáles elementos del problema deben ser iguales. Escriben la ecuación respetando esa igualdad verbalizada.

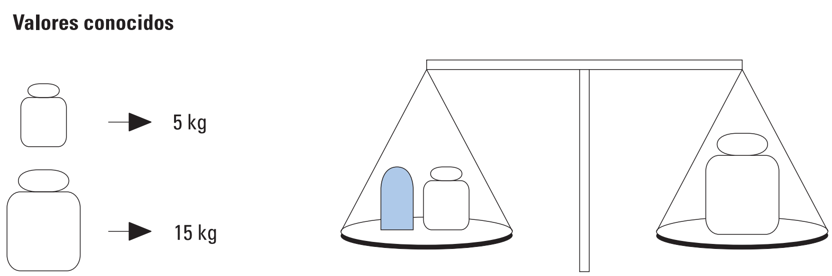
Actividad 9

Plantean y resuelven ecuaciones simples con una incógnita, manipulando las expresiones algebraicas y las igualdades. Interpretan el resultado de la ecuación para dar respuesta al problema. Reconocen la multiplicidad de problemas que se pueden responder a través de una ecuación.

Ejemplo

Reflexionan en torno a las propiedades de una igualdad, se apoyan en la observación de una balanza.

- Si una balanza está equilibrada, ¿qué significa? Entonces, ¿cuál sería el peso del objeto desconocido? Comentan sobre el razonamiento empleado para saber el peso desconocido.



- Si se agrega peso en un brazo de la balanza, ¿qué se debe hacer para que se mantenga el equilibrio? ¿Y si se quita peso en un brazo de la balanza? ¿Qué se debe realizar en el otro?
- Analizan ese efecto en una igualdad sin incógnita, por ejemplo: $5 \cdot 3 = 4 + 11$

  Agregan lo mismo en cada parte de la igualdad, quitan lo mismo, multiplican y dividen por lo mismo y observan qué sucede con la igualdad. ¿Se mantiene? ¿Se modifica?

  Establecen conclusiones respecto de cómo se comportan las igualdades y las condiciones para que se mantengan.

a) Leen cada problema y siguen los pasos que se sugieren en cada uno para plantear la ecuación que dé respuesta al problema. Interpretan el resultado de ella y responden a lo pedido en la situación.

Marisol está calculando la nota que necesita para obtener de promedio un 6,3 y así eximirse del examen final. Sólo le falta una nota para cerrar el promedio y sus notas hasta el momento son: 5,8; 6,5; 6,2; 6,8; 6,7; 5,7

¿Cuál es la nota que necesita para obtener el promedio deseado?

- Determinan cuál es la incógnita del problema y recuerdan cómo se obtiene el promedio, observan que el promedio final es de 7 notas, de la cual la última es la incógnita.
- Escriben la ecuación determinando sus dos miembros.
- Reducen los términos que se puedan, en este caso sumar las notas conocidas.
- Aplican las propiedades de las operaciones de manera de despejar la *x*.
- Resuelven las operaciones en cada miembro hasta obtener al valor de *x*.
- Responden a la pregunta del problema.

COMENTARIO

Antes de presentar la ecuación, es muy importante que se den cuenta que el promedio es de 7 notas y que éstas se deben sumar para luego dividir el resultado por el número de notas.

La ecuación que puede presentarse: (5,8 + 6,5 + 6,2 + 6,8 + 6,7 + 5,7 + x) : 7 = 6,3

Tal vez alguna alumna o alumno decida sumar primero todas las notas y ahí presentar la ecuación: (37,7 + x): 7 = 6,3.

Luego, en la manipulación de la ecuación, es importante que se den cuenta de que en la parte derecha de la misma ya no es posible reducir aún más la expresión y, por lo tanto, se debe evitar la división y aplicar las propiedades de la igualdad (multiplicar por 7 en cada parte de ella, si se desea eliminarlas de la parte izquierda); después es fácil despejar la *x*.

- Se les propone una variación de la situación anterior.

> *Otro compañero le pide ayuda a Marisol para calcular la nota que él debería obtener para alcanzar el mismo promedio de 6,3. Le dice que hasta el momento, el promedio de las 6 notas corresponden a un 6,1, por lo que él cree que deberá tener un 6,4. ¿Qué le responde Marisol?*

- Repiten el análisis realizado en la situación anterior explicando primero lo que significa que el promedio de las 6 notas es de 6,1.
- Teniendo como referente la ecuación de la situación anterior la modifican para dar respuesta a este nuevo dato.
- Repiten los pasos de la solución anterior.
- Responden al problema explicando cuál es la respuesta que entrega Marisol a su compañero de acuerdo al resultado de la ecuación.

COMENTARIO

En esta variación la respuesta entrega como la nota requerida un 7,5, lo cual obviamente no es posible que el compañero logre, y esto no significa que la ecuación esté mal resuelta sino que el alumno no puede eximirse.

- Resuelven otras ecuaciones que se planteen a partir de problemas.

b) Leen las situaciones verbales de la columna A y las ecuaciones de la columna B. Conversan con su grupo y determinan la ecuación que sirve para encontrar la respuesta a cada una. Hay problemas que se pueden resolver por medio de una misma ecuación y puede haber situaciones que no tengan una ecuación que les corresponda.

Columna A	**Columna B**
1. ¿Cuál es la edad de Felipe si se sabe que el doble de su edad más 5 años es lo mismo que 31 años?	
2. José tiene 2 sobres de láminas de 5 en cada uno, más algunas sueltas. Si en total se juntan 31 láminas, ¿cuántas corresponden a láminas sueltas?	$2x + 5 = 31$
3. La mamá de una familia recibe un premio especial en dinero y decide regalar el 31% de éste distribuyéndolo así: a cada uno de sus 2 hijos les entrega el 5% y a su marido el resto. ¿Qué % del dinero destinado al regalo recibe su marido?	$31 - 5 = x$
4. Fernanda obtuvo 31 puntos en su prueba. Al revisar el puntaje lo único que logra saber es que por cada una de 5 preguntas obtiene 2 puntos, pero desconoce cuántos puntos alcanzó en el ítem de desarrollo. ¿Cuánto vale ese ítem?	$31 = (2 \bullet 5) + x$
5. Federico logró vender 31 boletos de rifa, que corresponden a 2 talonarios completos y 5 boletos más. ¿Cuántos boletos traía cada talonario?	

- Revisan las respuestas observando que una misma ecuación puede ayudar a resolver situaciones diferentes. Comentan sobre la posibilidad de encontrar otro problema el cual pueda resolverse usando alguna de las ecuaciones propuestas. Reflexionan en torno a la potencia de una ecuación como una herramienta para encontrar respuestas a los problemas, aunque sean muy diversos y complejos.

c) Para cada uno de los siguientes casos, indican si la frase es verdadera o falsa, explican por qué:

- Si $x - 2 = 25$ entonces $x = 23$
- Si $2x = x + 5$ entonces $x = 5$
- Si $7x = 14$ entonces $x = 2$
- Si $-7x = 0$ entonces $x = 0$
- $-x + 5 = 11$ entonces $x = 6$

COMENTARIO

Dependiendo del curso se puede proponer a los estudiantes que creen para cada una de las ecuaciones anteriores una situación que le corresponda, compartiendo las situaciones y corrigiéndolas.

d) Resuelven ecuaciones entregadas por el profesor o profesora y comprueban, en cada caso, si el resultado obtenido satisface la ecuación.

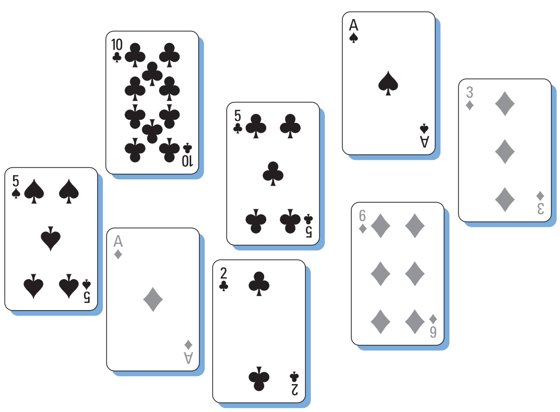
Actividades propuestas para la evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de ellas están diseñadas para ser trabajadas en grupo.
En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas

Resuelven problemas que impliquen comparar, ordenar y calcular operaciones con números positivos y negativos.

En un juego de naipes, las cartas con pintas negras son puntos en contra y las rojas son puntos a favor. Si un jugador termina el juego con -1 punto, no importando la cantidad de cartas, ¿qué naipes podría haber obtenido? Presentan al menos dos posibilidades utilizando 2 cartas. Presentan al menos dos posibilidades utilizando más de 2 cartas.



Indicadores

- Reconocen que el valor total de las cartas negras debe ser mayor en un punto que el de las cartas rojas.
- Identifican que la suma total de los puntos obtenidos por el jugador es -1.
- Plantean correctamente las posibilidades de combinación de dos naipes.
- Plantean correctamente las posibilidades de combinación de más de dos naipes.

Resuelven problemas a través de una ecuación.

1. Francisca corrió 1,2 km más que el doble de lo que corrió Pedro. ¿Cuántos metros corrió Pedro, sabiendo que Francisca corrió 5,4 km?

2. Un rectángulo tiene un largo que es el cuádruple de su ancho, si su perímetro es de 80 cm, ¿cuál es su largo?

3. Hay 31 cebollas en tres pilas. La primera tiene 5 menos que la tercera y la segunda tiene 15 más que la tercera. ¿Cuántas cebollas hay en cada pila?

- Reconocen el término desconocido.
- Designan con una incógnita el término desconocido.
- Plantean la ecuación que permite resolver el problema.
- Resuelven correctamente la ecuación.
- Responden la pregunta planteada en el problema.

Escriben expresiones algebraicas simples y las evalúan para distintos valores.

- La letra y representa el precio por segundo de un teléfono en tarifa baja y x el precio por segundo en horario de tarifa alta. Representa por medio de una expresión algebraica:
  - el teléfono se usó 1500 segundos en horario de precio bajo;
  - el precio por segundo de tarifa alta equivale a 5 veces el precio por tarifa baja;
  - el precio de un minuto en tarifa baja es un quinto del precio de 1 minuto en horario de tarifa alta.

- Si el precio por segundo en horario de tarifa baja es de $2,5 ¿cuánto valen 500 segundos en horario de tarifa alta?
- Y si al año siguiente la relación entre ambos valores se mantiene pero el precio del segundo en tarifa alta corresponde a 15 pesos, ¿cuánto cuesta el segundo en horario de tarifa baja?

- Usan correctamente los símbolos, asociándolos a la variable que corresponde.
- De las múltiples posibilidades, escriben al menos una que corresponda a la situación.
- En la expresión algebraica se puede identificar directa y claramente la relación entre los datos.
- Plantean una ecuación que permite encontrar el resultado.
- Resuelven correctamente la ecuación.
- Resuelven sin recurrir a ecuaciones, pero son capaces de explicar el procedimiento (explicitar las relaciones entre variables).

Unidad 4

Potencias

TIEMPO ESTIMADO: 6-8 SEMANAS

Contenidos

Potencias de base natural y exponente entero

- Potencias como multiplicación de factores iguales.
- Análisis y comparación de la representación gráfica (geométrica) de a^2 y de a^{-2}.
- Interpretación de a^{-2} y de a^{-3} como $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{a^3}$ respectivamente.
- Análisis de situaciones de crecimiento y de decrecimiento exponencial.
- Investigación de regularidades y propiedades de operaciones con potencias a partir de la resolución de problemas.

Sistema de numeración decimal

- Asociación de una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo a cada posición en el sistema de numeración.
- Interpretación y expresión de resultados como sumas ponderadas de potencias de 10 en situaciones problema.

Números decimales y fracciones

- Resolución de problemas en los que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos e infinitos periódicos.
- Uso de la calculadora para investigar y establecer patrones en familias de números decimales.
- Uso de aproximaciones convenientes de números decimales infinitos.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.
- Lectura y análisis de resultados de encuestas de opinión.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Utilizan las potencias de base y exponente natural para la descripción de procesos de crecimiento o de decrecimiento exponencial.
2. Utilizan la escritura de potencias para realizar operaciones aritméticas con grandes y/o pequeñas cantidades en el contexto de la resolución de problemas.
3. Comprenden el efecto de elevar a -2 y -3 en contextos numéricos y geométricos, y fundamentan las diferencias con elevar al cuadrado y al cubo, respectivamente.
4. Fundamentan procedimientos operatorios utilizando argumentos basados en las propiedades de las potencias y en la suma ponderada de potencias de base 10.
5. Describen y fundamentan la posibilidad de escribir cualquier número, por grande o pequeño que éste sea, utilizando potencias de base diez, asociándolo a la estructura del sistema de numeración decimal.
6. Aplican propiedades fundamentales del sistema de numeración, en particular basadas en potencias de base 10, para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas y facilitar procedimientos operatorios.

Orientaciones didácticas

En el nivel anterior (NB5) se trataron las potencias como una notación que permite expresar cantidades de manera sintética. Se puso énfasis en el desarrollo de situaciones que permitieran a los alumnos y alumnas distinguir claramente entre adiciones iteradas y multiplicaciones de varios factores iguales. Se trabajó en particular con potencias de base positiva y exponentes dos y tres, tanto en contextos numéricos como geométricos. En esta unidad se generaliza el trabajo a las potencias de exponente entero positivo o negativo.

Un contexto esencial de las actividades de esta unidad está en la comprensión, análisis y expresión de situaciones de crecimiento y decrecimiento exponencial. Se trata de percibir las diferencias entre un crecimiento (o decrecimiento) de este tipo y el que se produce, por ejemplo, por adiciones. Se establece una relación con expresiones utilizadas habitual y cotidianamente como, por ejemplo, para ilustrar el rápido crecimiento de poblaciones, o de deudas, etc. cuando se dice “en tal situación se produjo un crecimiento exponencial”. En el uso cotidiano no siempre esta referencia coincide con un crecimiento “matemáticamente” exponencial. No obstante, grafica muy bien la rapidez del crecimiento o decrecimiento. (Por ejemplo, se menciona en casos de poblaciones de bacterias que se duplican en breve tiempo, para explicar la rapidez con que se expande una enfermedad).

Las potencias de exponente negativo se trabajan particularmente ligadas a la escritura de números decimales, ya sea en la expresión de pequeñas cantidades o de cantidades que requieren ser expresadas con muchas cifras decimales. Se aborda así también en esta unidad la estructura decimal del sistema de numeración habitual, culminando un estudio que se inició en el primer ciclo de la Enseñanza Básica, llegando a la escritura de cualquier número, por grande o pequeño que sea, sobre la base de potencias de diez, con exponentes positivos o negativos.

En este aspecto, esta unidad tiene especial relación con temas que se están trabajando en el mismo nivel en el Subsector Estudio y Comprensión de la Naturaleza.

Por otra parte, se profundiza en las propiedades básicas de las potencias a partir de su uso en la resolución de problemas y en la fundamentación tanto de resultados como de procedimientos para resolver operaciones y problemas.

De este modo, como en programas anteriores, los nuevos conocimientos se van ligando, de manera permanente, con conocimientos ya adquiridos. En este sentido, las potencias de exponente positivo, ya trabajadas en niveles anteriores, son la base desde la cual se construyen las de exponente negativo. Del mismo modo, las situaciones problema permiten comprender las propiedades y éstas, a su vez, sirven para mejorar u optimizar procedimientos de resolución de operaciones.

Otro aspecto muy importante abordado en esta unidad es el estudio de regularidades numéricas y la observación de patrones numéricos basados en las potencias. Estas regularidades y patrones tienen sentido, tanto para avanzar en un mayor conocimiento, comprensión y manejo de los números enteros y racionales, como para la ejecución comprensiva de procedimientos operatorios y la resolución de problemas. En este sentido, se privilegia el uso de tablas y diagramas para ordenar información y apoyar el desarrollo de razonamientos sistemáticos y la obtención de conclusiones generales.

Como en todo el programa, transversalmente se trabajan expresiones algebraicas y la resolución de problemas por medio de la formulación y resolución de ecuaciones.

Actividades

Actividad 1

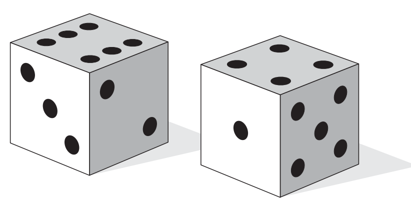
Resuelven y analizan situaciones que impliquen multiplicaciones sucesivas de factores iguales y utilizan la notación de potencias para describir procedimientos y resultados.

Ejemplos

1. Analizan las siguientes situaciones y buscan procedimientos para encontrar las respuestas.

a) Se sabe que si se tira un dado se pueden obtener 6 resultados, como son: que aparezca el número 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

- ¿Qué sucede si se tiran 2 dados en forma simultánea? ¿Cuáles son estos resultados? ¿Cuántos son? Se sugiere pensar en dados de distintos colores para ayudar a analizar la situación.
- ¿Cuántos resultados son si se tiran en forma simultánea 3 dados?, ¿ y si son 4 dados?



- Comparten los procedimientos usados para la primera pregunta y evalúan si es útil para abordar las siguientes. Corrigen sus procedimientos y las respuestas a cada pregunta.
- Relacionan las potencias de exponente 2 y 3, vistas el año anterior, con los resultados obtenidos al lanzar dos y tres dados respectivamente.
- Asocian una multiplicación de factores iguales como un procedimiento útil para encontrar el total de resultados en el problema. Abrevian esa multiplicación a través de una potencia, identificando en la situación qué indicaría la base, qué el exponente y qué correspondería al valor numérico o resultado de la potencia.

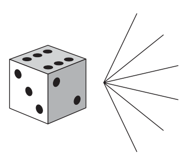
COMENTARIO

Los procedimientos usados por los alumnos y alumnas pueden ser muchos, probablemente con los primeros dados analicen los resultados caso por caso, lo cual es muy útil; conviene alentarlos a ordenar los datos de manera de captar fácilmente el patrón, por ejemplo:

Posibles números con 1 dado	**Posibles números con 2 dados:** dado 1 dado 2
1	1 – 1
2	1 – 2
3	1 – 3
4	1 – 4
5	1 – 5
6	1 – 6
	2 – 1
	2 – 2
	2 – 3
	2 – 4
	2 – 5
	2 – 6
	3 – 1
	3 – 2
	3 – 3
	......
Total de resultados que se pueden dar: 6	Total de resultados que se pueden dar: 6 • 6

A medida que la acción sea repetitiva puede surgir la necesidad de otro esquema o bien que aparezca la multiplicación sucesiva que es lo deseado.

Un diagrama que aporta es esquematizar en un árbol, aunque es necesario prestar atención al significado de cada rama en el esquema.



En 7º Año Básico los estudiantes se enfrentaron a ese tipo de situaciones, las que ahora amplían a exponentes mayores a 3.

b) Para una campaña pro defensa de las ballenas, un grupo ecológico desarrolló como estrategia de difusión que cada uno de sus 40 miembros enviara una carta a 3 amigos. En ella se daba a conocer la situación de las ballenas y se pedía a su vez que cada uno repitiera la misma acción enviando copias de la carta a 3 personas más.

Si se consideran los envíos de los miembros del primer grupo a sus amigos como etapa 1 y los envíos de sus amigos a otras personas como etapa 2, y así sucesivamente, ¿cuántas cartas son enviadas en cada una de las etapas: 1, 2, 3, 4, 5?

- Establecen un esquema que ayude a analizar la situación. Presentan y corrigen las respuestas.
- Comparan esta situación con la anterior, establecen semejanzas y diferencias. Comentan los procedimientos usados y las respuestas.
- Escriben una multiplicación para expresar el total de personas en conocimiento de la información en cada etapa. Escriben una potencia para expresar las multiplicaciones de factores iguales.

COMENTARIO

Si se inicia el envío con 40 • 3 cartas y luego se expresa el total de cartas por etapa con sucesivas multiplicaciones por 3, la primera etapa no es una multiplicación de factores iguales, sí lo son las siguientes; por lo tanto, el total de cartas enviadas se podría expresar como:

Etapa 1: 40 • 3

Etapa 2. 40 • 3 • 3 ó 40 • 3^2

Y así sucesivamente.

Esto marca una diferencia con el problema anterior en el cual siempre el factor era 6.

Al igual que en el problema a) es conveniente identificar qué elemento de la situación se puede asociar con la base de la potencia (cantidad de cartas que envía cada uno) y asociar el exponente a las etapas.

Al final se puede agregar la siguiente pregunta y establecer la diferencia con las preguntas anteriores: ¿Cuántas personas, contando a los miembros de la asociación, son informadas hasta la etapa 4?

Si se desea recordar previamente algo de lo que conocen de las potencias, se puede completar una tabla como la siguiente en la cual leen cada expresión y la asocian a una potencia de exponente 2 ó 3 que la pueda resumir, además de recordar la interpretación geométrica en la que se puede asociar las potencias de exponente 2 y 3 a un cuadrado y a un cubo respectivamente.

4 • 4 • 4=	
5 • 5=	
El doble de dos por dos	
El triple de tres por tres	
Siete veces siete	
Diez veces diez	

c) Descomponen en forma multiplicativa cada uno de los siguientes números, obteniendo 2, 3, 4 factores según sea posible.

64 75 13 48 5

- Investigan cuáles son los números primos y se desafían a modificar las descomposiciones multiplicativas antes obtenidas de manera de obtener factores primos y expresar los números como un producto de potencias cuyas bases sean números primos.

  Pueden utilizar un diagrama de árbol para organizar el trabajo de búsqueda.

d) Reflexionan sobre la utilidad de las potencias, ya sea en la solución de problemas como en la expresión de cantidades; las caracterizan mencionando sus elementos: base y exponente, y el significado de cada uno.

2. Analizan las siguientes situaciones y buscan procedimientos para encontrar las respuestas.

a) Una prueba tiene 1 ítem con 8 aseveraciones a las cuales se puede responder si es verdadera o falsa.

   ¿Cuántas respuestas diferentes es posible obtener en este ítem si no se deja ninguna en blanco?

   ¿Cuántas respuestas diferentes es posible obtener en este ítem si las aseveraciones son 9?, y ¿si son 10?

- Asocian una multiplicación de factores iguales como un procedimiento útil para encontrar el total de resultados en el problema. Abrevian esa multiplicación a través de una potencia, identificando en ella qué indicaría la base, qué el exponente y qué correspondería al valor numérico o resultado de la potencia. En el caso de ser necesario, recuerdan del año anterior las potencias de exponente 2 y 3.
- Responden a la siguiente pregunta desafío: ¿De cuántas formas es posible responder este ítem si tiene 10 aseveraciones y se sabe que una de ellas se deja en blanco?
- Realizan un esquema imaginando que tiene sólo 1 afirmación, sucesivamente van agregando otra y observan el patrón que se va repitiendo. Usan las potencias para escribir la cantidad de las posibles respuestas a medida que van aumentando las afirmaciones.

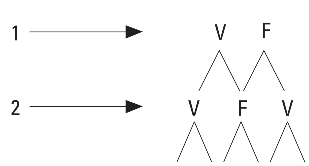
COMENTARIO

Este ejemplo es análogo al anterior por lo que es válido el mismo comentario.

Para responder la situación, se aseguran de la correcta comprensión del problema, si es necesario realizan un esquema de respuestas de una o dos aseveraciones que cumplan con la primera condición.

Los esquemas son importantes para visualizar y resumir la situación. A continuación se presentan dos esquemas que se pueden comparar, uno permite la expresión del problema en forma más particular y el otro en forma más general.

Un esquema posible es:



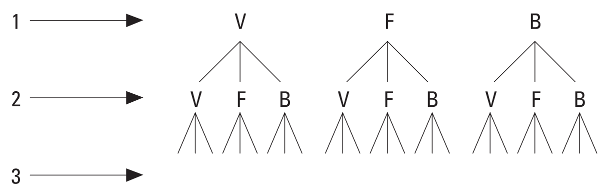
Para asegurarse de la correcta interpretación de este esquema, se sugiere realizar preguntas como: Si las 10 preguntas fuesen respondidas falsas, sin importar si están correctas o no, ¿cuál sería el recorrido que se podría hacer en el diagrama y que interpreta esa situación?

Observar que cada pregunta corresponde a una multiplicación, así en la 1, hay 2 posibles respuestas (V o F). Al incluir 2 preguntas ya existen 2 • 2 respuestas posibles: V-V; V-F; F-V; F-F

Si se continúan agregando preguntas hasta que se alcancen las ocho, el esquema continúa y se observa claramente el total de posibles formas de responder bajo esas condiciones.

Se sugiere focalizar el análisis en el aumento sucesivo y siempre de 2 en cada V o F. Esto es diferente en la pregunta desafío, cuando las condiciones cambian a sólo 9 preguntas correctas; entonces, al no saber cuál es la pregunta sin responder, las variables no son 2, sino 3 (V, F y en blanco).

Otro esquema posible es:

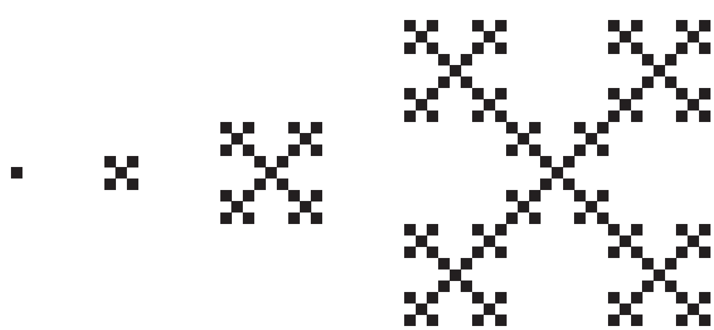


Otra posibilidad es usar una tabla como la siguiente:

Nº de pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Cantidad de posibles respuestas a la pregunta	2	2	2	2	2	2	2

Cuando las posibilidades de respuestas incluyen una en blanco, las posibles respuestas son 3 en una de las preguntas y el resto 2, no importando el número de pregunta que se presente en blanco.

b) Para diseñar una forma fractal, por ejemplo, un copo de nieve, es suficiente partir de una figura como un cuadrado, como se muestra a continuación. La formación del copo se logra al repetir la figura lograda sucesivamente.



- Diseñan la figura que corresponde a la quinta etapa, observan el patrón numérico que se forma y responden:

  ¿Cuál es el número de pequeños cuadraditos que contiene cada figura?

  ¿Cuántos cuadraditos es posible predecir que se necesitarán en la 6ª figura, en la 7ª, en la 10ª?

- Escriben una multiplicación para expresar el total de cuadraditos necesarios en cada etapa del dibujo.
- Comparan esta situación con la anterior de la letra a), establecen semejanzas y diferencias. Comentan los procedimientos usados y las respuestas.

c) Reflexionan sobre la utilidad de las potencias, ya sea en la solución de problemas como en la expresión de cantidades; las caracterizan mencionando sus elementos: base y exponente y el significado de cada una.

Actividad 2

Desarrollan estrategias para encontrar el valor de una potencia, el valor de la base, dada una potencia; el exponente, dada la base, y la potencia. Comparten y discuten distintas estrategias.

Ejemplos

1. Leen la situación y responden a las preguntas planteadas:

   En la organización de una fiesta de curso, la persona que organiza optó por realizar una cadena telefónica de manera que ella parte llamando a dos personas, esas dos continúan llamando a otras dos, cada una de ellas a otras dos y así sucesivamente. Ha buscado un sistema de modo que no se repitan los llamados a las mismas personas. La primera etapa de la cadena la representa el llamado que ella realiza a las 2 personas; la segunda, aquella en la que esas personas llaman a otras dos, y así sucesivamente. ¿En qué etapa se realizan 4 llamados?, ¿y 64? ¿Hasta qué etapa se han realizado 8 llamados?

- Comentan la situación, realizan un esquema que la represente. Discuten una forma de encontrar la respuesta y la relacionan con las potencias.

a) Si cada persona llama a otras 4, ¿en qué etapa se realizan 4 llamados?, ¿y 64?¿Es posible que en alguna etapa se realicen exactamente 8 llamados? ¿Por qué?

Hasta la tercera etapa, ¿cuántos llamados se han realizado? Y sólo en la tercera etapa, ¿cuántos se realizan?

Comparan las dos cadenas telefónicas presentadas y la diferencia en las potencias de ambas. Asocian el exponente de una potencia a las etapas de llamados y generalizan una forma de encontrar el exponente.

- En la cadena telefónica en la cual la persona que organizó la fiesta parte efectuando 2 llamados y debe comunicar la información a 30 personas, ¿cuántas etapas de llamados deben hacerse, de manera que las personas sean avisadas sólo 1 vez?

COMENTARIO

El objetivo de las preguntas en las cuales se conoce el número total de llamados de esa etapa y el número de llamados que realiza cada persona y se pide el número de la etapa a la que corresponden los datos entregados, es encontrar el exponente de la potencia.

Es importante poner atención a los procedimientos usados, diferenciando claramente que no se obtiene el valor del exponente simplemente dividiendo el valor numérico de la potencia por la base de la misma, es decir, el ejercicio inverso de una potencia no es la división (como lo es de la multiplicación).

Es importante que los alumnos y alumnas diferencien aquellas preguntas que se refieren a una determinada etapa de aquellas en las que se pregunta por el total de llamados acumulados hasta determinada etapa. Deben darse cuenta que estos últimos incluyen la suma de las potencias presentes en cada etapa anterior.

b) Si se piensa en diferentes cadenas telefónicas en la cual la cantidad de llamados que se realizan en la tercera etapa en cada una de ellas es:

- 216
- 64
- 125
- 27
- 1.000

¿Cuántos llamados realiza cada persona en cada una de esas cadenas?

¿Cuántos llamados en total se han realizado hasta esta tercera etapa?

- Comparten las preguntas y los procedimientos usados para encontrar las respuestas, los relacionan con las potencias y los diferencian de las preguntas realizadas en la letra a) de esta actividad.

2. Leen la situación y responden a las preguntas planteadas:

   Un fractal (como el copo de nieve de la actividad anterior) se forma por la repetición sucesiva de la figura anterior y se puede componer de distinta cantidad de unidades. Si se compone de 3, ¿en cuál etapa de formación se logra tener una figura con: 27, 243, 2.187 cuadraditos?

   ¿Hasta qué etapa se han usado en total 37 cuadraditos y 2.467?

- Comentan la situación, realizan un esquema que la represente. Comparten una forma de encontrar la respuesta y la relacionan con las potencias.

a) Si los cuadraditos se organizaran de 6, ¿en cuál etapa la figura tiene 36 cuadraditos?, ¿y 1.296? ¿Es posible que en alguna etapa se utilicen 64 cuadraditos? ¿Por qué?

   Comparan las figuras presentadas y la diferencia en las potencias de ambas. Asocian el exponente de una potencia a las etapas de las figuras y generalizan una forma de encontrar el exponente.

b) Si se piensa en diferentes figuras en las cuales la cantidad de cuadraditos que se contabilizan en la tercera etapa en cada una de ellas es:

   - 216
   - 64
   - 125
   - 27
   - 1.000

   ¿Cada cuántas unidades se va formando la figura en cada etapa?

- Comparten las preguntas y los procedimientos usados para encontrar las respuestas, los relacionan con las potencias y los diferencian de las preguntas realizadas en la letra a) de esta actividad.

Actividad 3

Buscan procedimientos que permitan establecer igualdades entre una potencia y una expresión compuesta por operaciones entre éstas. Generalizan los procedimientos encontrados asociándolos a las propiedades de las potencias.

Ejemplos

1. Organizados en grupos, buscan estrategias para resolver los siguientes problemas, expresan las respuestas como número y como potencia:

a) La medida del ancho de un rectángulo es 10^5 (unidades de longitud) y la medida del largo es 10^7 (unidades de longitud).

- ¿Cuál es el área del rectángulo?
- El largo de un segundo rectángulo de igual área que el primero es de10^9 unidades de longitud. ¿Cuál es la longitud del ancho?
- ¿Cuáles pueden ser las medidas de otros rectángulos (cuyas medidas correspondan a potencias de base 10) que tengan igual área que el rectángulo inicial?

• Establecen conclusiones en relación con el producto y el cuociente de dos potencias de igual base.

b) Cuál es el área de un rectángulo, cuyo largo es 6^4 y ancho es 2^4 ?

- ¿Cuál es el largo de otro rectángulo de igual área que el anterior y de ancho 3^4 ?
- ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de otros rectángulos que tengan igual área que el rectángulo inicial?

• Establecen conclusiones en relación con el producto y cuociente de potencias de distinta base e igual exponente.

c) ¿Cuál es el área de un rectángulo de largo 5^4 y ancho 2^4?, ¿y de uno de largo 8^7 y ancho 3^7?, ¿cómo se puede determinar el área de estos rectángulos sin realizar el cálculo exacto de las potencias?, ¿cuánto mide el largo de otro rectángulo de igual área que el primero y cuyo ancho es 3^4?, ¿y el de otro cuyo ancho es 6^4?

• Buscan un procedimiento que facilite encontrar el resultado, sin desarrollar las potencias. Analizan si el procedimiento es válido para otros valores.

• Establecen conclusiones en relación con el producto y cuociente de dos potencias de igual exponente y distinta base.

d) ¿Cuál es volumen de un cubo cuya arista mide 4^2?, ¿y de uno de arista 7^5? ¿Cómo se puede determinar el volumen de estos cubos sin realizar el cálculo exacto de las potencias?

- Buscan un procedimiento que facilite encontrar el resultado, sin desarrollar las potencias. Analizan si el procedimiento es válido para otros valores.
- Establecen conclusiones en relación con la potencia de una potencia.

e) ¿Cuánto mide el ancho de cada uno de los siguientes rectángulos?:

- Si el área es 10^5 y el largo del rectángulo es 10^5.
- Si el área es 10^{12} y su largo también mide 10^{12}.
- Si el área y el largo miden 7^3.
- Si el área y el largo miden lo mismo.

- Escriben en una tabla las divisiones que les permiten encontrar el ancho del rectángulo, comentan por qué el ancho es siempre 1 y confrontan este resultado con lo aprendido respecto a la propiedad de las potencias cuando se dividen dos potencias de igual base. En su análisis se basan en ejercicios como los siguientes:

¿Cuál es el exponente de la potencia que expresa el cuociente en cada caso? ¿Cuál es el valor numérico del cuociente?

$10^5 : 10^5 = 10^{\square}$

$10^{12} : 10^{12} = 10^{\square}$

$7^3 : 7^3 = 7^{\square}$

$9^{25} : 9^{25} = 9^{\square}$

- Sintetizan con ayuda del docente en relación al valor numérico de las potencias cuyo exponente es cero.

2. Descomponen los siguientes números en multiplicaciones de 10 y los expresan como productos de potencias de base 10. Completan una tabla para organizar la información. Establecen conclusiones. Verifican las conclusiones con otras bases y exponentes.

Número	Producto de 10	Potencia de base 10	Otras formas de expresar el número
1.000.000	$10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10$	10^6	$10^4 \bullet 10^2$ $10^3 \bullet 10^3$ $10^5 \bullet 10$ $10^2 \bullet 10^4$
10.000.000			
100.000.000			

- Escriben como cuociente de múltiplos de 10, los siguientes números y los expresan como cuocientes de potencias de base 10. Completan una tabla para organizar la información. Establecen conclusiones. Verifican las conclusiones con otras bases y exponentes. Relacionan estas conclusiones con las propiedades de la división de potencias de igual base.

Número	Cuociente de potencias de base 10	Otras formas de expresar el número
1.000	10.000 : 10	$10^4 : 10$
	100.000 : 100	$10^5 : 10^2$
	1.000.000 : 1.000	$10^6 : 10^3$
100		

- Transforman cada una de las siguientes potencias y expresiones que contienen potencias en una potencia de base 10 con un único exponente.

  100^3, 1000^2, $(10^4)^6$

- Establecen conclusiones. Verifican las conclusiones con otras bases y exponentes.

COMENTARIO

Un tipo de procedimiento puede ser el siguiente:

$$(100)^3 \longrightarrow \underbrace{100 \bullet 100 \bullet 100}_{(10^2)^3} = 1.000.000 = 10^6$$

Entonces, $(100)^3 = (10^2)^3 = 10^6$

- Reordenan expresiones dadas y las escriben como una expresión con un único exponente. Establecen conclusiones. Verifican las conclusiones con otras bases y exponentes.

  Por ejemplo: $100^3 \bullet 10^3 = 1000^3$

- Con ayuda del docente establecen conclusiones y sintetizan las propiedades de las potencias.

COMENTARIO

$100^3 \bullet 10^3 = 100 \bullet 100 \bullet 100 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 = (100 \bullet 10)^3 = (1000)^3$

3. Organizados en grupos analizan la veracidad de proposiciones relacionadas con potencias, como las siguientes:

a)

$5^2 \bullet 5^7 = 5^9$	$3^9 : 3^4 = 3^5$	$(4^3)^2 = 4^6$
$6^3 \bullet 4^3 = (6 \bullet 4)^3$	$8^3 : 4^3 = (8 : 4)^3$	$4^7 + 4^2 \neq 4^{(7+2)}$
	$3^7 - 3^2 \neq 3^{(7-2)}$	

- Establecen argumentaciones fundadas en los procedimientos que permiten comprobar las afirmaciones.
- Verifican si las afirmaciones son generalizables a otras bases y a otros exponentes. Analizan en qué casos se cumple la proposición.
- Establecen conclusiones en relación con las propiedades de las potencias.

b) Responden las siguientes preguntas apoyados con una tabla que ayude a la organización de la búsqueda de las respuestas:

- ¿Cuál es el valor numérico de una división de potencias de igual base y exponente?
- ¿Es posible expresar ese resultado como una potencia?, ¿cuál?, ¿ésta es única?

c) Ramiro y su compañera Evelyn están estudiando el tema de potencias en un libro y leen lo siguiente:

“Cualquier potencia elevada a cero tiene un valor numérico igual a 1. Por ejemplo: $5^0 = 1$”

Ramiro dice que es imposible y su compañera dice que aunque parezca extraño ella cree que es cierto. ¿Qué justificación puede haber entregado cada estudiante basándose en lo aprendido sobre las propiedades de las potencias?

- Discuten la situación anterior, explican los fundamentos y deciden quién está en lo correcto.

COMENTARIO

En la actividad a) es importante que verifiquen si las propiedades se cumplen cuando las bases son distintas.

En la actividad b) es interesante dar la oportunidad a la investigación de estas preguntas analizando una amplia gama de ejemplos y que se basen en las propiedades antes aprendidas para encontrar la potencia que expresa el valor de una división de potencia.

La tabla que puede organizar la búsqueda se puede ir completando por partes, de manera de responder la primera pregunta y después la segunda; y luego realizar una síntesis de ambos razonamientos a través de la situación planteada en la actividad c).

Divisiones de potencias de igual base y exponente	**Valor numérico de cada término de la división**	**Aplicación de propiedades y expresión del resultado como potencia**	**Igualdad que contenga el resultado de la división expresado como número y potencia**
$10^3 : 10^3 =$	$1000 : 1000 = 1$	$10^3 : 10^3 = 10^{(3-3)}$ $10^3 : 10^3 = 10^0$	$10^3 : 10^3 = 10^0 = 1$
$7^4 : 7^4 =$			

Es decir, la potencia de exponente cero (y de base distinta a cero) expresa una división de potencias de igual base y exponente.

Actividad 4

En situaciones variadas que informan sobre mediciones de magnitudes, determinan diversas maneras de escribirlas, basándose en las potencias de base 10. Establecen conclusiones en relación con el sistema de numeración decimal. A partir de situaciones diversas, analizan las ventajas y desventajas de distintas formas de escribir grandes y pequeñas cantidades, en función de la comunicabilidad y comprensión.

Ejemplo

Analizan información referida a distancias y longitudes.

a) Interpretan la información entregada en la siguiente tabla, en la cual se presenta la longitud del diámetro de cada uno de los planetas del sistema Solar y la distancia al Sol, expresadas en kilómetros.

Planeta	**Diámetro**	**Distancia al Sol**
Júpiter	$1{,}4 \cdot 10^5$ km	777,7 millones de km
Marte	$6{,}8 \cdot 10^3$ km	228 millones de km
Mercurio	$0{,}49 \cdot 10^4$ km	57.850.000 km
Neptuno	$4{,}85 \cdot 10^4$ km	4,5 miles de millones de km
Plutón	$4 \cdot 10^3$ km	$5{,}92 \cdot 10^9$ km
Saturno	$1{,}21 \cdot 10^5$ km	1.428.000.000 km
Tierra	$1{,}27 \cdot 10^4$ km	149,5 millones de km
Urano	$5{,}1 \cdot 10^4$ km	2,87 miles de millones de km

- Contestan preguntas como las siguientes, para dar significado a las mediciones que presentan:
  - ¿Cuál de los planetas es más grande (tiene mayor diámetro)? ¿Cuál de los planetas es más pequeño (tiene menor diámetro)? ¿Por qué?
  - Entre Saturno y Júpiter, ¿cuál está más lejos del Sol? ¿Por qué?
  - En el caso del diámetro de la Tierra, ¿qué representa el 10^4?, ¿a cuántos kilómetros corresponde esta longitud? Si consideramos que Chile mide aproximadamente 5.000 km de largo ¿cuántas veces, aproximadamente, corresponde la longitud de nuestro país al diámetro de la tierra?
- Determinan y discuten sobre el orden de magnitud de las mediciones.

b) Leen la siguiente información y tratan de explicar el significado de la potencia con exponente negativo: ¿Es mayor o menor que la unidad en la que se expresa? ¿Qué tamaño imaginan que puede tener? Entonces, ¿qué podría significar la potencia de exponente negativo? Y si la información incluye una potencia de base 10 elevada a un exponente cero, ¿es mayor o menor que la unidad en la cual se entrega?

El virus de la gripe mide $120 \cdot 10^{-9}$ m, la célula del Sida mide $100 \cdot 10^{-9}$ m, la célula de la polio mide $27 \cdot 10^{-9}$ m.

- Si se tiene la imagen de estas células, cada una en una hoja de tamaño carta, ¿cuánto se ha tenido que ampliar el tamaño de la célula real para que su imagen ocupe esa hoja?

c) Relacionan la forma de escribir la información numérica anterior con las potencias de base 10 y con la estructura del sistema numérico decimal. Completan un cuadro con las posiciones de nuestro sistema decimal, los valores posicionales de cada una y la potencia de base diez que se asocian a las posiciones mayores a 1.

- Establecen conjeturas sobre cuáles potencias de base 10 se podrían asociar a las posiciones cuyos valores posicionales son menores a 1. Comprueban dichas conjeturas apoyándose en las propiedades de las potencias para establecer el valor del exponente en las potencias de valor relativo menor a 1. Reflexionan sobre la utilidad de escribir cantidades con muchas cifras enteras o cifras decimales utilizando potencias de base 10. Recuerdan que en el subsector Estudio y Comprensión de la Naturaleza utilizan este tipo de escritura.

d) Investigan sobre las unidades de medida del sistema métrico decimal, la relación entre el prefijo y el valor que tienen los múltiplos y submúltiplos expresados en la unidad de medida determinada.

Completan una tabla en la que se relacione con las potencias de base 10.

e) Buscan distintas formas de expresar una medida. Discuten sobre la comunicabilidad y comprensión de las formas de presentar la información.

COMENTARIO

El cuadro al cual se hace referencia en la actividad c) puede ser como el siguiente. Se pueden incluir tantas posiciones como se estime conveniente.

Nombre de la posición	**Unidad de mil**	**Centena**	**Decena**	**Unidad**	**décimos**	**centésimos**	**milésimos**
Valor posicional	1.000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Multiplicaciones o divisiones	10 • 10 • 10	10 • 10	10	$10^0 : 10^0$	$10^0 : 10^1$	$10^0 : 10^2$	$10^0 : 10^3$
Potencia de base 10							

Respecto de la tabla que apoye la búsqueda de una potencia de base 10 que se asocie a las posiciones cuyos valores son menores a 1, es importante insistir que las alumnas y alumnos establezcan previamente algunas conjeturas, y que se les recuerden las propiedades. Se les debe proponer la tabla después de sus propios esfuerzos de búsqueda y para apoyar la síntesis del tema.

Otro ejemplo que se puede utilizar es el siguiente:

El análisis de sangre de un paciente dio los siguientes resultados:

Glóbulos rojos: 4,8 x 10^3 por mm^3 de sangre, Glóbulos blancos: 8 x 10^3 por mm^3 de sangre.

Se estima que una persona tiene 5 litros de sangre: ¿cuántos glóbulos rojos y blancos tendrá el paciente?

La tabla que se pide que completen respecto de los prefijos utilizados en el sistema métrico decimal (en la actividad d) puede ser como la siguiente:

Múltiplos					**Submúltiplos**			
E	Exa	$= 10^{18}$	=	1.000.000.000.000.000.000				
P	Peta	$= 10^{15}$	=	1.000.000.000.000.000	d	deci	$= 10^{-1}$	= 0,1
T	Tera	$= 10^{12}$	=	1.000.000.000.000	c	centi	$= 10^{-2}$	= 0,01
G	Giga	$= 10^{9}$	=	1.000.000.000	m	mili	$= 10^{-3}$	= 0,001
M	Mega	$= 10^{6}$	=	1.000.000	µ	micro	$= 10^{-6}$	= 0,000 001
Ma	Miria	$= 10^{4}$	=	10.000	n	nano	$= 10^{-9}$	= 0,000 000 001
K	Kilo	$= 10^{3}$	=	1.000	p	pico	$= 10^{-12}$	= 0,000 000 000 001
H	Hecta	$= 10^{2}$	=	100	f	femto	$= 10^{-15}$	= 0,000 000 000 000 001
D	Deca	$= 10^{1}$	=	10	a	atto	$= 10^{-18}$	= 0,000 000 000 000 000 001

Almanaque mundial 2001

Actividad 5

Analizan situaciones en que las cantidades involucradas no se pueden escribir como sumas finitas ponderadas y discuten sobre la pertinencia de truncar o aproximar las cifras decimales, dependiendo de la situación.

Ejemplo

Expresan números como sumas de potencias de 10.

- Expresan números naturales como sumas de potencias de 10. Constatan que esto es siempre posible y lo relacionan con la notación decimal.
- Expresan números, como por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, como sumas de potencias de 10. Constatan que es necesario recurrir a potencias de exponente negativo y que en estos casos el proceso siempre termina. Discuten sobre si siempre es posible escribir números de esta forma y si siempre este proceso tiene fin.
- Expresan números, como por ejemplo $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, como sumas de potencias de 10 y constatan la existencia de un proceso infinito pero periódico.
- Buscan un número cuyo cuadrado sea lo más parecido posible a 2. Esto lo hacen probando números en la calculadora. Constatan que ellos no alcanzan a terminar el proceso y que tampoco pueden visualizar un posible período. Reflexionan sobre los números irracionales. Analizar el concepto de truncar o aproximar un número por un decimal finito.

Actividad 6

Analizan situaciones en que se observe un proceso de crecimiento y/o de decrecimiento exponencial, comparando los crecimientos de tipo geométrico y aritmético; utilizan la notación de potencias para expresar los procesos.

Ejemplos

1. Leen y comentan las informaciones entregadas, desarrollan las actividades pedidas con cada una.

a) Se observa que en determinadas condiciones de laboratorio el crecimiento experimentado por un cultivo de bacteria corresponde al doble del día anterior.

El señor Fernández observa que, durante una semana con muy buenas condiciones climáticas y en primavera, su planta predilecta mostraba 2 nuevos brotes cada día.

- Interpretan las informaciones anteriores confeccionando una tabla que muestre el aumento que tiene cada población presentada.
- Buscan un patrón numérico que se repita en este aumento sucesivo, lo caracterizan, asociando una potencia de base 2 al crecimiento de la población de bacterias.
- Comparan ambos crecimientos y asocian el aumento en el cultivo de bacterias como un crecimiento de carácter exponencial. Lo diferencian del aumento aditivo que presenta la planta. Confeccionan un gráfico simple para cada situación y los comparan.

COMENTARIO

Las tablas pueden ser como éstas:

Día	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Bacterias	1	2	4	8	16	32	...
Población de bacterias expresadas como potencias de base 2	2^0	2^1					
Diferencias con el anterior		1	2	4			

Día	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Brotes		2	4	6	8	10	12
Diferencias con el anterior		2	2	2			

Al observar ambas tablas es interesante preguntar:

¿Cómo varía la potencia en el primer caso?

¿Cuál es la diferencia diaria en ambos casos? ¿Cuál será en ambos casos el valor siguiente en la tabla? ¿Cómo se puede predecir?

Tal vez sea interesante expresar también en potencias de base dos los brotes de la planta y analizar la diferencia con el crecimiento de las bacterias.

Brotes	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
Número de brotes expresados como potencias de base 2	2^1	2^2	$2^2 + 2^1$	2^3	$2^3 + 2^1$	$2^3 + 2^2$

La complejidad del tema referente a crecimiento exponencial se profundiza en 4º Año de Educación Media, por lo que en este nivel es de interés básicamente su diferenciación de un crecimiento lineal. En este caso, se agrega una misma cantidad varias veces, a diferencia del crecimiento exponencial en el cual se produce un crecimiento muy rápido, debido a que éste es de tipo multiplicativo traduciéndose en una potencia en que se varía el exponente.

b) A partir de la información siguiente referida a la población mundial registrada o determinada en ciertos períodos de tiempo buscan responder: ¿Qué tipo de crecimiento ha presentado la población mundial? ¿Es posible establecer un patrón en su crecimiento si se aproximan algunos datos?, ¿cuál? ¿Es posible conjeturar sobre la posible población que se espera para los próximos cincuenta años?, ¿en qué basan su predicción?

Población estimada por continentes y regiones
Años 1500 a 1990 (millones de personas)

Continente o región	Año 1500	Año 1600	Año 1700	Año 1800	Año 1850	Año 1900	Año 1950	Año 1990
Asia	245	338	433	631	790	903	1393	3113
Europa	67	89	95	146	209	295	395	498
América	42	13	12	24	59	165	330	724
Africa	87	113	107	102	102	138	219	624
Rusia	17	22	30	49	79	127	180	289
Oceanía	3	3	3	2	2	6	13	26
Total	461	578	680	954	1241	1634	2530	5292

Fuente: Livo-Bacci, M., *A concise History of world population* (Oxford, 1992). En McNeil, W. *"La demografía y la urbanización"*, en *Historia Oxford del Siglo XX* (Ed. Planeta, 1999).

- Realizan nuevas preguntas a partir de la información, como por ejemplo, observar la variación de la población americana entre el 1600 y fines del 1700 (se recomienda la conexión con subsector Estudio y Comprensión de la Sociedad, que pueda explicar la disminución de la población haciendo una asociación con la situación histórica y social en América en esa época). Así como también, basándose en los datos de los últimos períodos, determinar la tendencia en el crecimiento poblacional en América: ¿entre qué rangos es posible que se encuentre el número de habitantes el próximo siglo?

c) Una empresa está liquidando sus productos, por cierre de local. Según los registros, cada semana se vende la mitad del stock; y, debido a que no se continuará con el negocio, no se reponen los stocks. Un local de la competencia se encuentra en la misma condición, pero cada semana vende 30 productos y tampoco repone los stocks.

- Realizan una tabla para representar la cantidad de productos que quedan en los stocks en cada uno de los locales. Suponen un número determinado de productos al inicio de las ventas y en función de éste realizan la tabla para cada caso.
- Realizan un gráfico que muestre el descenso de la cantidad de productos en stock en cada local.

- Analizan el comportamiento del descenso de la cantidad de producto. Diferencian los dos tipos de decrecimientos y los asocian al decrecimiento exponencial y lineal, respectivamente.

COMENTARIO

Para comprender cabalmente cada situación se recomienda que los estudiantes tomen un número determinado, por ejemplo 1000, y a partir de éste confeccionen una tabla y un gráfico que permitan analizar el tipo de decrecimiento, y comparen los dos tipos de crecimiento del stock.

2. Comentan distintas informaciones de uso cotidiano en las que se utiliza "crecimiento o decrecimiento exponencial" para caracterizar cierto tipo de variación de un fenómeno.

a) *La población mundial tiene un crecimiento exponencial.*

Durante el tiempo en que no se tomaban claras medidas de protección, el contagio del SIDA creció en forma exponencial.

El carbono 14 que sirve para determinar , entre otras cosas, la data de muerte de una persona, se fundamenta en el decaimiento radiactivo el cual funciona como decrecimiento exponencial.

Los indicadores muestran que luego de aparecer en el mercado un producto sustituto y con mejores resultados, las ventas del producto inicial se reducen, observándose un decrecimiento exponencial de las ventas.

- Interpretan dichas aseveraciones.
- Buscan ejemplos que permitan comparar este tipo de crecimiento con uno lineal.
- Asocian el crecimiento exponencial al aumento multiplicativo de un factor y lo diferencian de un aumento aditivo, es decir, lineal.

COMENTARIO

En este punto lo que se pretende es caracterizar a nivel muy intuitivo el crecimiento exponencial como uno muy rápido, diferente al lineal y asociado a un crecimiento de tipo multiplicativo y no lineal o aditivo.
Es importante que relacionen las actividades realizadas anteriormente (número de cuadraditos necesarios para formar un copo de nieve en una etapa determinada, y la comparación entre dos y tres etapas sucesivas, lo que les permite visualizar ahí también un crecimiento exponencial de la cantidad de cuadraditos que se van utilizando y el aumento entre una etapa y otra.)

b) En una publicación se afirma que el uso de internet crece exponencialmente y presentan la siguiente tabla para fundamentar su aseveración.

Año	Número de computadoras conectadas
1981	213
1982	235
1983	562
1984	1.024
1985	2.308
1986	5.089
1987	28.174
1988	80.000
1989	159.000
1990	376.000
1991	727.000
1992	1.313.000
1993	2.217.000
1994	5.846.000
1995	14.352.000
1996	21.819.000
1997	29.670.000

- Explican el título de la noticia referente al crecimiento exponencial. Establecen una relación entre el número de computadoras conectadas a internet en años sucesivos y estiman el aumento de éste.
- Considerando los datos de la tabla, se expresaron de manera aproximada las cifras del año ’82 al ’86 como producto de una potencia de base 2 por un factor como se muestra a continuación:

  235 como $135 \cdot 2^1$

  562 aproximadamente $140 \cdot 2^2$

  1.024 como $128 \cdot 2^3$

  2308 aproximadamente $144 \cdot 2^4$

  5089 aproximadamente $150 \cdot 2^5$

- Analizan esta forma de expresar los datos e intentan estimar el rango de variación de los datos entre años sucesivos. Responden preguntas como las siguientes y fundamentan su respuesta:
  - ¿Qué expresión representa mejor la variación de los datos de años sucesivos?
  - Cuál de las siguientes posibilidades representa mejor este tipo de variación, aproximadamente:

    Se produce un aumento alrededor de 140 computadoras conectadas a la red cada año.

    Se produce un aumento alrededor de (140 x 2) computadoras conectadas cada año.

    Se produce un aumento al doble de computadoras conectadas cada año.

Si se supone que el número de conexiones cada año aumenta como entre los años ´82 y '86, ¿cuántas computadoras habrían conectadas, aproximadamente, este año?

- Caracterizan el crecimiento exponencial y buscan en la misma tabla si existe algún otro período de tiempo que aproximadamente se ajuste a este tipo de crecimiento.

COMENTARIO

Comentar con las alumnas y alumnos sobre la aproximación de las cifras: en general en la realidad no se encuentran los valores exactos correspondientes a un crecimiento exponencial perfecto, pero sí muy cercanos a él, como en este caso, y al desarrollarse en el tiempo sufre variaciones que aparecen ejemplificadas en el período de tiempo que se seleccionó.

A propósito de información como esta se puede presentar la lectura de un pequeño artículo respecto a internet y su distribución en el mundo, pues las conexiones se encuentran concentradas en los países desarrollados y en USA especialmente. La reflexión acerca de estos aspectos están estrechamente ligados al subsector Estudio y Comprensión de la Sociedad.

Información extraída de la publicación: *Signos Vitales 1999*, Informe del Worldwatch Institute.
Lester R Brown; Michael Renner; Christopher Flavin

- Comparan el crecimiento exponencial analizado anteriormente con el que se presenta en la siguiente situación hipotética. Para la comparación se apoyan en una secuencia numérica que la represente.

  En las escuelas de la comuna se ha observado que en el último período de tiempo cada año, incluyendo los docentes, hay 10 nuevas personas que tienen una computadora conectada a internet. Y se comenzó con 2 conexiones.

- Caracterizan este crecimiento como aditivo y lo diferencian del exponencial.
- Buscan información en las que pueda existir un crecimiento exponencial y que sea comprensible para ellos.

Actividad 7

Establecen la relación que existe entre las áreas de los cuadrados y volúmenes de cubos que se generan al aumentar al doble (al triple, al cuádruple, etc.), y al disminuir a la mitad (a la tercera parte, la cuarta parte) respectivamente, el lado de un cuadrado inicial o la arista de un cubo inicial o de referencia. Relacionan la expresión a^{-2} con la expresión $\frac{1}{a^2}$ y la expresión a^{-3} con la expresión $\frac{1}{a^3}$. Interpretan geométricamente la expresión a^{-2} y a^{-3}.

Ejemplo

Completan una tabla como la siguiente en la cual comparan las potencias de igual base pero de exponente de 2 y -2. En el último caso usan las propiedades de las potencias para justificar su valor numérico.

Potencia	Desarrollo de la potencia	Valor numérico de la potencia
2^2	$2 \bullet 2$	4
2^{-2}	$2^0 : 2^2 = \frac{2^0}{2^2}$	$\frac{2^0}{2^2} = \frac{1}{4}$
3^2		
3^{-2}		
4^2		
4^{-2}		
5^2		
5^{-2}		

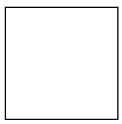
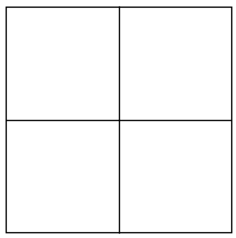
- Observan la relación entre los valores numéricos de las potencias de igual base, pero de exponente 2 y -2. Toman de referente la unidad y la comparan respecto del valor numérico de la potencia.

COMENTARIO

La comparación pedida usando como referente el 1, corresponde a una verbalización como la siguiente: “Si 2^2 es 4 veces 1, entonces 2^{-2} es un cuarto de la unidad. Si 3^2 es 9 veces 1, entonces 3^{-2} es un noveno”, etc.

La comparación con la unidad ayuda a imaginar el “aumento” y la “disminución” de los valores numéricos y a relacionarlos con sus exponentes. Se busca esta misma relación en las actividades siguientes, cuando asocian una representación geométrica a estos casos.

a) Toman como referente una unidad cuadrada y representan en dibujos 1^2, 2^2, 3^2, de manera de formar cuadrados. Y completan una tabla a modo de resumen.

Unidad cuadrada de referente	**Dibujo del cuadrado formado**	**Número de unidades por arista**	**Potencia relacionada con el dibujo y multiplicación asociada**	**Valor numérico de la potencia (cantidad total de unidades cuadradas)**
		2	$2 \bullet 2$ o el doble de 2 2^2	4

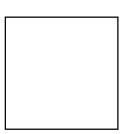
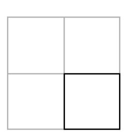
Responden:

- ¿Cómo se puede representar 2^{-2}?
- ¿Qué multiplicación iterada se puede asociar a 2^{-2}?
- Si en el caso de las potencias elevadas a 2, por ejemplo 2^2 significa $2 \bullet 2$ y el dos corresponde a la medida de la arista del cuadrado, ¿cuál debe ser la medida del lado del cuadrado para representar 2^{-2}?

  Toman como referente la misma unidad cuadrada anterior y representan un cuadrado de medida $\frac{1}{2}$ unidad. Asocian esta representación a la potencia 2^{-2}.

  Se preguntan lo mismo para una potencia de base 3 elevado a -2. Para representarla toman la unidad básica y representan un cuadrado de lado $\frac{1}{3}$ unidad. Asocian esta representación a la potencia 3^{-2}. Tratan de representar lo mismo usando potencias de base 4 ó 5.

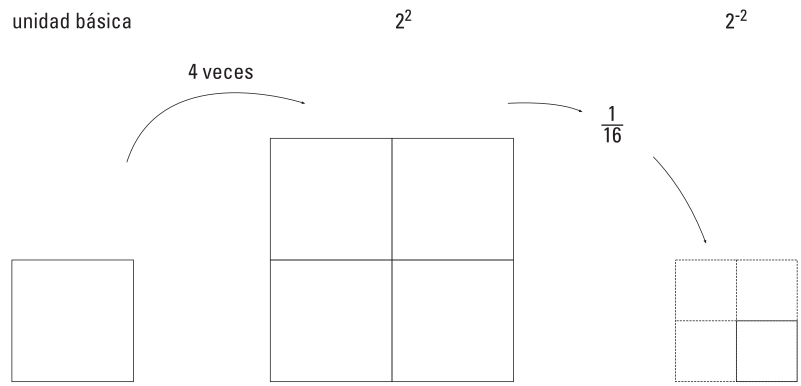
  Completan una tabla con la información anterior.

Unidad cuadrada de referente	**Dibujo del cuadrado formado**	**Número de unidades por arista**	**Potencia relacionada con el dibujo y multiplicación asociada**	**Valor numérico de la potencia (cantidad total de unidades cuadradas)**
	 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

COMENTARIO

Realizar la representación geométrica con potencias de base mayor a 4 ó 5 es difícil, ya que cada vez se reduce más el cuadrado; $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ de la unidad, es decir, cuadrados de lado igual a $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$ de la unidad básica.

b) Comparan la representación geométrica de las potencias de igual base y de exponente 2 y -2 y comprueban cuántas veces está contenido el cuadrado de la potencia elevada a -2 en el cuadrado de la potencia elevada a 2.

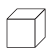
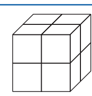


c) Completan una tabla como la siguiente en la cual comparan las potencias de igual base, pero de exponente de 3 y -3. En el último caso usan las propiedades de las potencias para justificar su valor numérico.

Potencia	**Desarrollo de la potencia**	**Valor numérico de la potencia**
2^3	$2 \cdot 2 \cdot 2$	8
2^{-3}	$2^0 : 2^3 = \frac{2^0}{2^3}$	$\frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{8}$
3^3		
3^{-3}		
4^{-3}		
5^3		
5^{-3}		

- Observan la relación numérica entre los valores de las potencias de igual base, pero de exponente 3 y -3. Toman de referente la unidad (el 1) y la comparan respecto del valor numérico de la potencia.

d) Toman como referente una unidad cúbica y representan en dibujos 2^3 y 3^3, de manera de formar cubos. Completan una tabla a modo de resumen.

Unidad cúbica de referente	**Dibujo del cubo formado**	**Número de unidades por arista**	**Potencia relacionada con el dibujo y multiplicación asociada**	**Valor numérico de la potencia (cantidad total de unidades cúbicas)**
		2	$2 \cdot 2 \cdot 2$ o el doble de 2 por 2 2^3	8

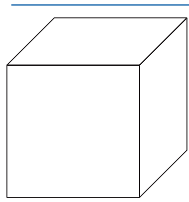
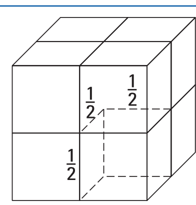
Responden:

- ¿Cómo se puede representar 2^{-3}?
- ¿Qué multiplicación iterada se puede asociar a 2^{-3}?
- ¿Cuál debe ser la medida del lado del cubo para representar 2^{-3}?

Toman como referente la misma unidad anterior y representan un cubo de arista $\frac{1}{2}$. Asocian esta representación a la potencia 2^{-3}.

Se preguntan lo mismo para una potencia de base 3 elevada a -3. Para representarla toman la unidad básica y representan un cubo de arista $\frac{1}{3}$. Asocian una representación a la potencia 3^{-3}.

Completan una tabla con la información anterior

Unidad cúbica de referente	**Dibujo del cubo formado**	**Arista**	**Potencia relacionada con el dibujo y multiplicación asociada**	**Valor numérico de la potencia (cantidad total de unidades cúbicas)**
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Comparan la representación geométrica de las potencias de igual base y de exponente 3 y -3, y comprueban cuántas veces está contenido el cubo de la potencia elevada a -3 en el cubo de la potencia elevada a 3.

Actividades propuestas para la evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de ellas están diseñadas para ser trabajadas en grupo.
En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores
Interpretan situaciones de crecimiento y se adelantan a cómo continuará éste en adelante. **1.** Para tener conciencia de cómo se puede transmitir una enfermedad contagiosa, piensa en un pueblo al cual llega un enfermo que en el lapso de quince días aproximadamente trasmite la enfermedad a 2 personas; luego, cada una de estas dos personas, al cabo de otros 15 días se la trasmite a otras 2, y así sucesivamente. En un principio esta enfermedad es asintomática, por lo tanto, las personas durante un período de tiempo no saben que están contagiadas. • Si el contagio continuara de esa manera, ¿en cuánto tiempo podría haber 500 infectados? • Si el contagio cada 2 personas se diera en vez de cada 15 días, cada un mes, ¿cuánto demoraría en haber 500 infectados en el pueblo?	• Comprenden la situación y expresan que es posible encontrar el resultado. • Proponen un procedimiento ordenado para encontrar la respuesta. • Desarrollan ese procedimiento y encuentran una respuesta razonable.
2. El Señor Concienzudo Paciente y la señora Previsora Buenamente están planificando un plan de ahorro: ambos desean comenzar con 10 mil pesos de ahorro e ir depositando mensualmente una cierta cantidad de dinero. El señor dice que él depositará 100 pesos al primer mes y luego 100 pesos más que el mes anterior. La señora dice que ella depositará 10 pesos al primer mes y luego el doble cada mes (es decir 20 pesos el segundo mes, 40 pesos el tercer mes, y así sucesivamente).	

- Analizan el aumento del dinero en cada caso, sin considerar los intereses.

- ¿Cuánto dinero tendrá cada uno en la cuenta si es que cumplen el plan de ahorro, al cabo de 1 año, si no se consideran los intereses?

- ¿Cuál de los dos planes recomendarías tú? Fundamenta tu elección.

- Describen uno de estos crecimientos como exponencial.
- Encuentran soluciones numéricas.
- Sus argumentos para recomendar uno u otro plan están bien formulados y son comprensibles.
- Al responder la primera pregunta es deseable que presenten un esquema o diagrama que ordene la información y mucho mejor si expresan el aumento de la cuenta con una fórmula general.

Resuelven problemas que implican la interpretación de información expresada como producto de un número y una potencia.

Las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol, en un momento dado son $4 \cdot 10^5$ km y $1{,}5 \cdot 10^8$ km respectivamente.

¿Cuántas veces mayor es la distancia de la Tierra al Sol que de la Tierra a la Luna?

- La interpretación de la información del enunciado les permite, efectivamente, hacer los cálculos y encontrar las respuestas correctas.

Unidad 5

Volumen

TIEMPO ESTIMADO: 8-10 SEMANAS

Contenidos

- Estimación y cálculo del volumen de cuerpos geométricos regulares expresándolos en unidades pertinentes.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de prismas rectos.
- Construcciones de redes para armar cilindros y conos.
- Experimentación de procedimientos concretos para medir el volumen de conos y cilindros.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros y conos.
- Relaciones de equivalencia entre unidades de volumen de uso corriente.
- Uso de ecuaciones para resolver problemas e interpretar fórmulas.
- Uso de aproximaciones convenientes de números decimales infinitos.

Aprendizajes esperados

1. Caracterizan los poliedros regulares en función de sus elementos y de la relevancia que han tenido en algunos períodos de la historia.
2. Utilizan de manera pertinente fórmulas para calcular el volumen de cuerpos geométricos y para analizar, predecir y/o justificar las eventuales variaciones en éste al variar algunos de los elementos del cuerpo (longitud de aristas, altura, área total).
3. Reconocen elementos de los cilindros y los conos, y los proyectan para el dibujo de redes correspondientes.
4. Comprenden la relación entre las fórmulas para calcular el volumen de diversos poliedros, el cilindro y el cono.
5. Evalúan y justifican estrategias (o procedimientos) para medir y/o calcular el volumen de cuerpos geométricos.

Orientaciones didácticas

Los temas centrales desarrollados en esta unidad están referidos a poliedros regulares y a cuerpos geométricos redondos, en particular el cono y el cilindro, tanto en sus características esenciales como en la medición y cálculo de volumen.

El estudio de los poliedros regulares se hace a partir del análisis de los prismas y pirámides ya trabajados en el nivel anterior y de la información que han obtenido en la unidad de geometría plana, sobre los polígonos regulares. De este primer acercamiento surge el cubo y el tetraedro como poliedros regulares y a partir de ellos se estudian las características de los poliedros regulares, se determinan otros y se justifica la existencia de sólo cinco.

Respecto de los cuerpos redondos se hace énfasis, como en niveles anteriores, en el estudio de otros cuerpos, en las representaciones planas de cuerpos, redes de cuerpos y en la construcción de redes dados algunos datos. Aquí surge la dificultad de construir una red de un cono, en el cual la incidencia principal está en el ángulo del sector circular correspondiente al manto del cono. Esta dificultad es enfrentada a partir del análisis y construcción de múltiples conos, con diferentes medidas. En este nivel no se resuelve teóricamente sino que, más bien, intuitiva y prácticamente.

En cuanto al volumen de cuerpos geométricos se propone que los alumnos y alumnas busquen distintas formas de medir el volumen de un cuerpo con el fin de hacer visible, por una parte, las dificultades propias de estos procedimientos y, por otra, mostrar la necesidad de contar con instrumentos matemáticos que ayuden a calcular con cierto grado de precisión y certeza. En este contexto surge la determinación de una fórmula general que permita calcular, en primer lugar, el volumen de prismas y cilindros y, en segundo, el volumen de pirámides y conos.

Finalmente, y como una manera de relacionar diferentes temas que se han trabajado en niveles anteriores y en este mismo nivel en la unidad de polígonos y circunferencias (Unidad 1), se propone un conjunto de actividades sobre áreas laterales y volúmenes. Del mismo modo, se observan variaciones de elementos en conos y cilindros para determinar efectos en áreas laterales, totales, basales y volumen; y la variación del volumen de prismas y cilindros, según la forma de construcción, manteniendo fija el área lateral.

Como en los niveles anteriores, se propone enfatizar en las actividades el desarrollo de razonamientos sistemáticos, de argumentaciones y justificaciones, tanto de procedimientos como de resultados, en el contexto de la resolución de múltiples problemas más que la memorización y aplicación mecánica de fórmulas.

Actividades

Actividad 1

Investigan en diversas fuentes bibliográficas sobre los cuerpos regulares. Comprueban que sólo son cinco e investigan la incidencia que tienen los ángulos de las regiones poligonales que se interceptan en cada vértice.

Ejemplo

a) Analizan las características de los prismas y pirámides y de los cuerpos geométricos regulares, para determinar qué tipo de prismas y de pirámides son poliedros regulares. Analizan las características de los poliedros regulares y a partir de preguntas tratan de determinar si existen otros.

b) Construyen los cuerpos geométricos regulares dadas sus redes y realizan un análisis para determinar otras características, completando una tabla con los siguientes aspectos: número y forma de las caras, número de aristas que concurren en cada vértice, suma de los ángulos que concurren en un mismo vértice.

- Establecen conclusiones, en relación con:
  - la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un mismo vértice;
  - el número de aristas que concurren en cada vértice; y
  - la medida de cada ángulo.
- Analizan la posibilidad de construir otros cuerpos regulares, a partir de triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares etc. que concurren en un mismo vértice. Establecen conclusiones, en relación con la cantidad de cuerpos regulares que existen y, basándose en el trabajo exploratorio, argumentan por qué no existen más.

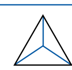
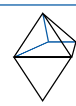
c) Trabajando en grupos, investigan en fuentes bibliográficas sobre los cuerpos geométricos regulares desde el punto de vista de su caracterización y de las asociaciones con los elementos de la naturaleza que se les han hecho en diversas culturas, especialmente en la antigua Grecia.

- Registran las informaciones recopiladas y elaboran un informe. Comparten en la clase las informaciones y hacen una síntesis.

COMENTARIO

Esta actividad apunta principalmente a que, en primer lugar, los estudiantes analicen los prismas y las pirámides estudiadas en el curso anterior, para determinar cuál es el único prisma regular (cubo) y cuál es la única pirámide regular (tetraedro). Aquí es interesante que a partir de las características de los polígonos regulares estudiados en la unidad de geometría plana, conjeturen sobre las características de los cuerpos regulares, y luego el docente introduzca las características de estos cuerpos. Posteriormente, describen los poliedros regulares (número y formas de las caras, número de aristas que concurren en un mismo vértice), buscan otros y fundamentan por qué sólo existen 5 cuerpos regulares. Es posible que planteen conjeturas, las confronten con los resultados de la investigación realizada con material concreto.

Ejemplo del tipo de tabla:

Tipo de polígono	**Medida de cada ángulo interior**	**Dibujo o nombre del cuerpo**	**Es posible construir un poliedro regular**	**Suma de los ángulos que concurren en un mismo vértice**	**Número de aristas que se intersectan en cada vértice**
Triángulo equilátero	60º	Tetraedro 	sí	60º • 3 = 180º	3 aristas (dibujo)
	60º	Octaedro 	sí	60º • 4 = 240º	4 aristas

El cuadro puede ser utilizado tanto para concluir que la suma de los ángulos que convergen en cada vértice es menos de 360º, como también para observar las características de los poliedros regulares; es decir, aquellos cuerpos cuyas caras son un mismo polígono regular, y en los que además, en cada vértice concurre la misma cantidad de aristas.

Finalmente, pueden realizar una investigación que permita hacer una caracterización histórica de los cuerpos geométricos regulares.

Actividad 2

Construyen redes de cilindros y conos rectos, utilizando instrumentos geométricos. Caracterizan dichos cuerpos geométricos a partir de sus elementos. Relacionan cilindros con prismas y conos con pirámides, al aumentar infinitamente el número de lados de los poliedros. Investigan las condiciones necesarias para construir una red de cono o cilindro, dada área basal y generatriz, perímetro del área basal.

Ejemplos

1. Examinan cajas de forma de cilindro y de cono. Describen las características de los cilindros y conos. Nombran los elementos de estos cuerpos redondos.

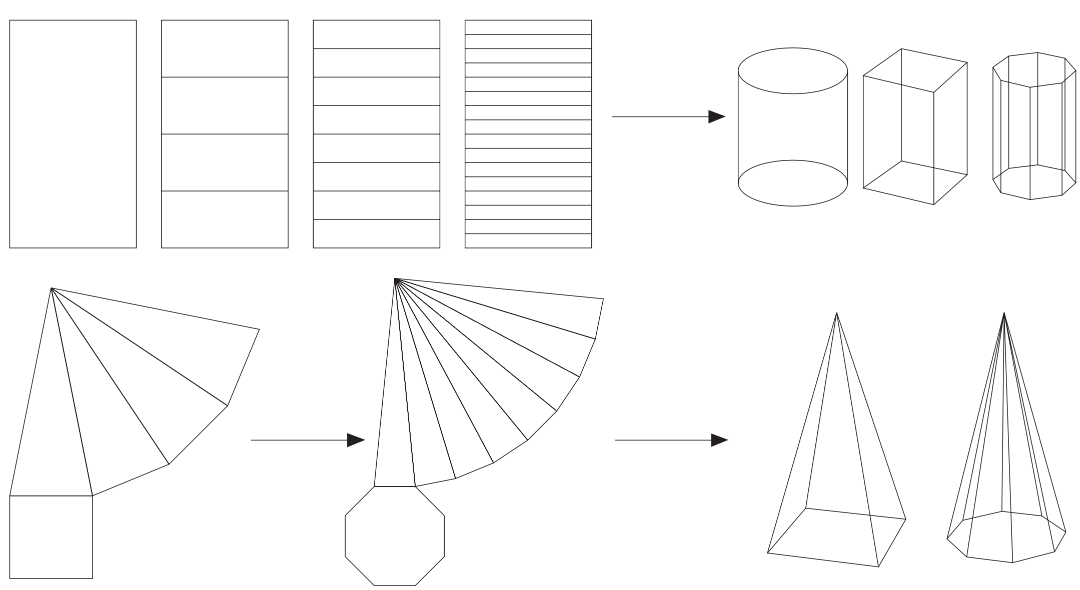
a) Caracterizan a partir de conjeturas las redes de estos cuerpos redondos. Desarman las cajas para verificar sus conjeturas. Establecen conclusiones determinando las características de las redes que permiten formar un cono o un cilindro.

b) Dado un set de hojas de papel de igual tamaño realizan dobleces para armar distintos prismas rectos de base regular. Aumentan el número de lados y ubican los prismas creados uno al lado del otro. Visualizan el cilindro como un prisma de infinitas caras. Establecen conclusiones.

c) A partir de una red de pirámide recta, analizan lo que ocurre con las caras laterales si se disminuye sucesivamente a la mitad la medida del lado de la cara basal de la pirámide recta. Visualizan el cono como una pirámide de infinitas caras. Establecen conclusiones.

COMENTARIO

En esta parte lo que se pretende es que los alumnos y alumnas comprueben sus conjeturas sobre las redes de los cilindros y los conos y que establezcan conclusiones; en el caso del cono, que el perímetro de la circunferencia de la base debe coincidir con el perímetro del sector circular (manto), y en el caso del cilindro, el perímetro de la circunferencia de la base debe coincidir con la medida de un lado del manto. En segundo lugar, el foco de atención está en que los estudiantes visualicen el cilindro recto como un prisma recto de infinitas caras y el cono recto como una pirámide recta de infinitas caras. Los siguientes dibujos muestran los dobleces de los papeles para lograr la visualización del cilindro y la red de la pirámide, en la que se modifica la medida del lado de la cara basal:



d) Construyen, utilizando instrumentos geométricos, redes de conos rectos y cilindros rectos dadas algunas características, por ejemplo:

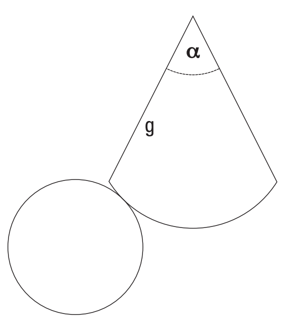
- Cilindro recto cuyo perímetro basal sea 3π.
- Cono recto cuyo perímetro basal sea 3π.

Reflexionan sobre los cilindros y conos que resultan de la construcción, ayudados con preguntas como las siguientes:

- ¿Cuántos cilindros/conos se pueden construir con esas características? ¿Cuáles son las condiciones que se deben entregar para que el cilindro/cono sea único?

COMENTARIO

En esta actividad el foco está en utilizar lo aprendido sobre áreas y perímetros de rectángulos y circunferencia en la construcción de redes de cilindros y conos. Es muy importante que las alumnas y alumnos reflexionen sobre las condiciones para la construcción de estos cuerpos redondos. Es recomendable partir con construcciones de redes de cilindros y posteriormente con conos, debido a que estos últimos tienen la dificultad adicional de la determinación del ángulo del sector circular. En el caso del ejemplo (perímetro basal 3π), se debe realizar la siguiente proporción para determinar el ángulo del sector circular:



$$\frac{\alpha}{360} = \frac{\text{Arco del sector circular}}{\text{Perímetro de la circunferencia de radio g}}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{3\pi}{2\pi g}$$

$$\alpha = \frac{3\pi \bullet 360^\circ}{2\pi \bullet g} = \frac{3 \bullet 360^\circ}{2 \bullet g}$$

Si $g = 2\text{cm}$

$$\alpha = \frac{3 \bullet 360^\circ}{2 \bullet 2} = \frac{3 \bullet 180^\circ}{4} = 135^\circ$$

Otros ejemplos:

- Cono recto cuyo perímetro basal sea 3πcm y su generatriz 5 cm.
- Cono recto cuya área basal sea de $5\pi\text{cm}^2$ y su generatriz 4 cm.
- Cilindro recto cuyo perímetro basal sea 3πcm y su área lateral $6\pi + 8\text{cm}^2$.

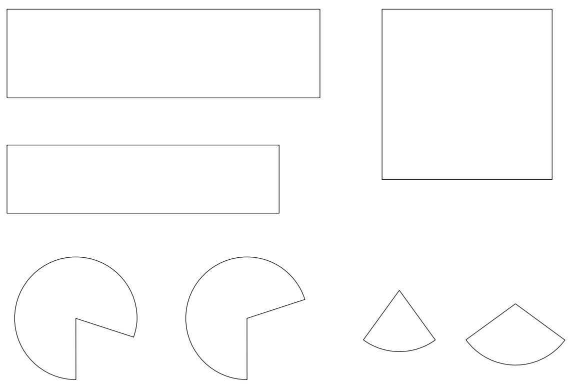
2. Desarrollan las actividades (a) y (b) del ejemplo anterior y luego:

a) Visualizan con ayuda de un software geométrico cómo es posible aumentar sucesivamente el número de lados de un prisma recto de tal forma que éste se transforme, luego de infinitas veces, en un cilindro recto. Establecen conclusiones.

b) Visualizan con ayuda de un software geométrico cómo es posible aumentar sucesivamente el número de lados de una pirámide recta de tal forma que ésta se transforme, luego de infinitas veces, en un cono recto. Establecen conclusiones.

c) A partir de mantos de cilindros y de conos conjeturan sobre la longitud de su altura, el radio de la cara basal, y la relación entre el tamaño de estos cuerpos geométricos.

Algunos mantos pueden ser como los siguientes:



COMENTARIO

El punto importante aquí es que los alumnos y las alumnas se imaginen los cilindros y los conos armados y a partir de ello especulen respecto de cuál es más alto o cuál tiene mayor diámetro basal, fundamentando sus conjeturas. Luego lo pueden comprobar recortando las redes y armando los cuerpos.

Actividad 3

Investigan diferentes productos o servicios en los cuales se utiliza unidades o mediciones de volumen. Buscan distintos procedimientos que permitan medir el volumen de cuerpos geométricos para:
- Analizar la variedad de maneras de determinar el volumen de algunos cuerpos geométricos.
- Determinar las distintas unidades de medición de volumen.
- Conjeturar acerca de volúmenes de objetos.

Ejemplo

Realizan una investigación en diversas fuentes bibliográficas como diarios, revistas, avisos comerciales y publicitarios, enciclopedias, etc. o realizan entrevistas para determinar objetos, servicios o actividades en los que se utiliza la medición de volumen. Comparten la información con sus compañeros y compañeras, y analizan la utilidad de la medición de volumen.

a) Intentan determinar el volumen de distintos objetos, tomando como unidad de medida otro objeto o llenando con agua los objetos. Trabajan con los siguientes materiales:

Tarros de leche, cajas de leche de 1 litro y de 200cc, cajas de zapatos, cajitas de fósforos, cilindros de los rollos de papel higiénico o toallas absorbentes, vasos plásticos, papel, agua, tubos de ensayo graduados.

- Llenan estos objetos con cajitas de fósforos, las que utilizan como unidad de volumen.
- Llenan con agua distintos objetos y luego vacían el agua en un tubo de ensayo o vaso graduado. Relacionan el valor indicado con el volumen del objeto.
- En jarros, vasos u otros envases llenos de agua sumergen objetos. Recogen el agua derramada en otro recipiente y miden su volumen al vaciarla en un vaso o jarro graduado. Relacionan el agua derramada con el volumen desplazado por el objeto y, por lo tanto, con el volumen del objeto.
- Especulan sobre el volumen de su cuerpo. Plantean y discuten sobre distintas formas de medirlo y/o estimarlo.
- Investigan empíricamente sobre el volumen de un kilogramo de agua y al revés, utilizando una balanza, la masa de un litro de agua y, en distintas fuentes bibliográficas averiguan sobre la relación que existe entre la masa de una persona y su volumen.

COMENTARIO

La idea es que relacionen que el volumen de un kilogramo de agua es aproximadamente un litro. Con la investigación bibliográfica se pretende que los alumnos y alumnas averigüen que debido al alto porcentaje de agua de la estructura orgánica del cuerpo humano, la densidad de nuestros cuerpos es similar a la del agua, por lo tanto, es posible suponer que una persona que pesa 70 kg, ocupa un volumen aproximado de 70 litros.

- Discuten sobre las diferentes formas de determinar el volumen de algunos cuerpos geométricos. Establecen conclusiones.

b) Construyen un centímetro cúbico. Determinan el volumen de los objetos utilizando el cm^3. Discuten: ¿cómo determinar el número de cajitas y cm^3 que caben dentro de cada prisma recto?, ¿por qué?

- Construyen un decímetro cúbico. Analizan objetos que tengan un volumen equivalente y/u otros con los que se puede formar uno de igual volumen. Asocian otras formas (por ejemplo, algunos paralelepípedos) a un decímetro cúbico. Por ejemplo: ¿cuánto volumen representa una caja de leche de 1 litro? Concluyen que un decímetro cúbico puede tener distintas formas.
- Conjeturan sobre el tamaño de un cubo de un m^3 de volumen. ¿Cuántas cajas de leche caben en un m^3? Explicitan el o los procedimientos que utilizaron para predecir el volumen. Construyen un metro cúbico, comprueban sus conjeturas y responden preguntas como las siguientes: ¿Cómo es

posible determinar la cantidad de cajas de leche que cabe en un metro cúbico sin contarlas todas de a una? Discuten sobre la invarianza del volumen si se redistribuyen las cajas de leche. Concluyen que un m^3 no necesariamente tiene una forma de cubo.

c) Discuten sobre las unidades de medición de volumen que conocen. Analizan el uso indistinto que se hace de 1 cc, 1 mL y de 1L o 1.000cc.

- Examinan distintos envases para determinar cómo se utilizan estas unidades de volumen. ¿En qué tipo de envase se privilegia el cc o mL o L? En el caso de los alimentos, ¿qué unidad se utiliza?, ¿varía según el tipo de alimento?, ¿qué ocurre en el caso de las bebidas gaseosas?
- Establecen conclusiones respecto de las formas en tres dimensiones y sobre la relación de su capacidad con el volumen.

Actividad 4

Investigan procedimientos para calcular el volumen de prismas rectos y cilindros rectos, relacionando la forma de obtenerlo en ambos tipos de cuerpos. Establecen fórmulas generales.

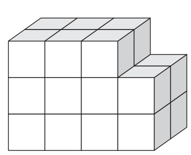
Ejemplo

a) Determinan, sin contar de uno en uno, la cantidad de cubitos de un cm de arista que conforman distintos prismas rectos de base cuadrada o rectangular dados, partiendo del cubo. Establecen procedimientos que permitan sintetizarse en una forma general aplicable a cualquier paralelepípedo simple o cuerpo compuesto por paralelepípedos.

b) Establecen conclusiones respecto a la forma sintética de determinar el volumen del cubo, prismas rectos de base cuadrada y rectangular.

COMENTARIO

Los cuerpos pueden ser como los siguientes:



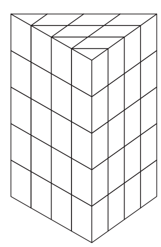
Procedimientos:
En la base hay 4 • 2 = 8 cubitos y en la altura 2. Luego 8 • 2 más 6 cubitos, en total hay 22.
En la base hay 3 • 2 = 6 cubitos y en la altura 3. Luego 6 • 3 más 4 cubitos, en total hay 22.

La idea aquí es llegar a concluir que la forma más rápida de contar la cantidad de cubitos es contar la cantidad que hay en la base y luego multiplicarla por la cantidad de cubitos que hay en la altura. Por tanto, en estos casos el volumen es más fácil de calcular utilizando el mismo procedimiento.

- Construyen con plasticina un prisma de base cuadrada, cuyo volumen esté dado y sea posible de construir; lo dividen en dos partes congruentes de tal forma que la base de los nuevos prismas sean triángulos rectángulos isósceles. Establecen la relación entre el volumen del prisma de base cuadrada y el de base triangular.

  Analizan el caso de la determinación de volumen de prismas rectos de base pentagonal, hexagonal, etc., descomponiendo los prismas en otros prismas rectos de base triangular. Establecen conclusiones generales en relación con la fórmula que permite calcular el volumen de prismas rectos.

  Reflexionan sobre la posibilidad de determinar el volumen de un cilindro recto utilizando la fórmula obtenida para los prismas rectos. Establecen una fórmula general que permita calcular el volumen, tanto de prismas rectos como de cilindros rectos.



COMENTARIO

En este punto lo que se pretende es que los estudiantes concluyan que el volumen del prisma de base triangular se calcula multiplicando el valor del área de la base por el valor de la altura. Esta conclusión es posible de establecer haciendo una relación entre el prisma de base cuadrada (fórmula del volumen) y el prisma que tiene de base un triángulo rectángulo, el cual es la mitad del cuadrado. Luego, determinar el volumen de distintos prismas, recurriendo a la descomposición en prismas de base triangular, para generalizar la conclusión sobre el cálculo de volumen de un prisma recto, multiplicando el valor del área de la base por el valor de la altura. Finalmente, después de analizar la incidencia en la forma del prisma al variar el número de lados de la base, establecen la fórmula general para determinar el volumen de cualquier prisma recto y de un cilindro como el producto del valor del área basal por el valor de la altura.

c) Desarrollan las actividades (a) y (b) del ejemplo anterior. Luego:

Construyen con plasticina distintos prismas rectos, variando el número de lados de la cara basal, obteniendo también un cilindro recto. Realizan cortes paralelos a la cara basal a un cm de distancia uno de otro. Analizan la cantidad de cubitos de 1 cm de arista que es posible contenga cada franja obtenida por los cortes. Hacen una extensión de esa estimación al número total de cubitos que puede contener el prisma o el cilindro en cuestión.

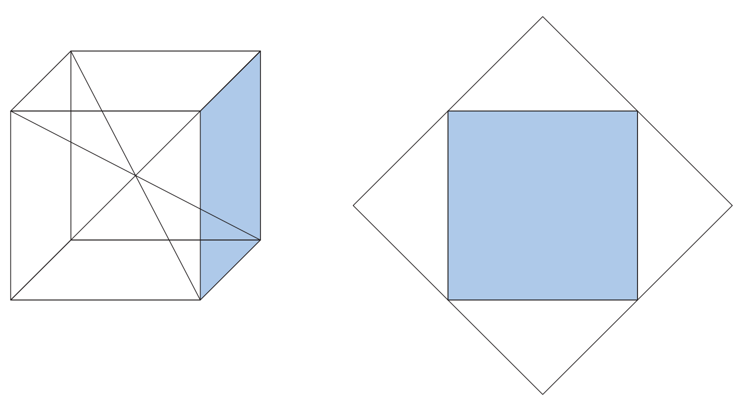
- Establecen conclusiones generales en relación con la fórmula que permite calcular el volumen de prismas y cilindros rectos.

Actividad 5

Investigan procedimientos para calcular el volumen de pirámides rectas y conos rectos, relacionando la forma de obtenerlo en ambos tipos de cuerpos. Establecen fórmulas generales.

Ejemplo

a) Dada la red de una pirámide recta de base cuadrada, construyen seis iguales e intentan formar un cubo, como muestra el dibujo. A partir de ello analizan la forma de determinar el volumen de una pirámide de base cuadrada.



- Determinan qué parte del volumen del cubo es el volumen de la pirámide.

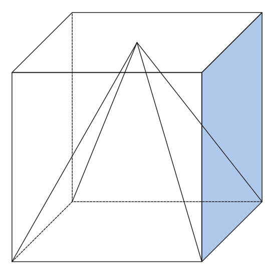
COMENTARIO

En este punto se pretende que los alumnos y alumnas relacionen el volumen del cubo y de la pirámide, el cual es la sexta parte del primero, para establecer la fórmula del volumen de la pirámide.

El área basal de la pirámide y del cubo es a^2 y la altura del cubo es a y de la pirámide es $\frac{a}{2}$, por lo tanto, el volumen de cada uno de estos cuerpos es:

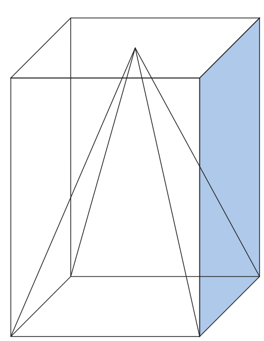
$$V(\text{cubo}) = a^3 = \underbrace{a^2}_{\text{Área basal}} \cdot \underbrace{a}_{\text{Altura}} \qquad V(\text{pirámide}) = \frac{a^3}{6} = \underbrace{a^2}_{\text{Área basal}} \cdot \underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{Altura}} \cdot \frac{1}{3}$$

b) Dada la red de una pirámide de base cuadrada y altura igual a la arista basal, construir una red de un cubo de igual base y altura, de tal forma que la red de la pirámide calce exactamente en el interior del cubo, como muestra el dibujo siguiente:



- Arman el cubo y la pirámide, llenan con semillas la pirámide y tomando eso como medida, establecen una relación con el volumen del cubo.
- Establecen una relación entre el volumen de una pirámide recta y un cubo de igual base y altura.

c) Dadas redes de pirámides de base cuadrada, pentagonal y/o triangular, construir una red de un prisma de igual base y altura, de tal forma que la red de la pirámide calce exactamente en el interior del prisma, como muestra el dibujo siguiente:



- Arman los prismas y las pirámides, los llenan de semillas y comparan sus volúmenes.
- Establecen una relación entre el volumen de una pirámide recta y un paralelepípedo o prisma de igual base y altura.
- Establecen una fórmula que permita calcular el volumen de la pirámide recta.

COMENTARIO

En este caso, se pretende que a partir de la fórmula del volumen del cubo de área basal a^2 y altura a, determinen el volumen de la pirámide recta de igual área basal y altura, relacionándolo con la fórmula obtenida en el punto anterior.

V(cubo) = $a^3 = a^2 \bullet a$ (área basal por altura) V(pirámide) = $a^2 \bullet a \bullet \frac{1}{3}$

De la misma manera determinan una fórmula más general para el volumen de una pirámide recta. En el caso de una pirámide de base cuadrada y altura h, se obtendría:

V(prisma) = $a^2 \bullet h$ V(pirámide) = $a^2 \bullet h \bullet \frac{1}{3}$.

Con el fin de establecer una fórmula general para calcular el volumen de una pirámide (V= $\frac{1}{3}$ • área de la base • altura de la pirámide), se sugiere partir con la construcción de redes de prismas, dadas las redes de las pirámides respectivas, teniendo especial cuidado en que la cúspide de la pirámide intercepte a la cara basal del prisma en sólo un punto. Luego, llenar con semillas la pirámide para determinar con cuántas de ellas se llena el prisma y establecer la relación entre los volúmenes de estos dos cuerpos de igual base y altura. Finalmente, establecen una fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

d) Aumentan el número de lados de la pirámide recta. Generalizan la fórmula del cálculo de volumen a otras pirámides rectas de base otro polígono.

Reflexionan sobre la posibilidad de determinar el volumen de un cono recto utilizando la fórmula obtenida para las pirámides. Establecen una fórmula general que permita calcular el volumen, tanto de pirámides rectas como de conos rectos.

Actividad 6

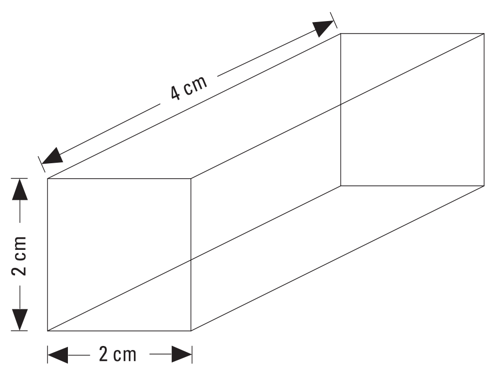
Resuelven diversos problemas en los cuales establecen el volumen de cuerpos geométricos u objetos asociados a ellos. Calculan los valores de elementos desconocidos, dados otros datos relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen. Utilizan ecuaciones en su resolución.

Ejemplos

1. Resuelven problemas como los siguientes:

a) Se ha construido una caja en forma de paralelepípedo rectangular para contener cubitos de queso crema de cóctel de 1 cm de arista. El perímetro de la base del paralelepípedo es de 12 cm, ¿cuál es la altura de la caja que contiene estos quesitos?

b) ¿Cuántos quesitos (cubos de 1 cm de lado) se pueden introducir en esta caja?



- Y si se decide introducir cubos más pequeños, de $\frac{1}{2}$ cm de lado, ¿cuántos se podrían introducir en la caja?

c) Analizan preguntas tales como las siguientes, buscan argumentaciones para fundamentar sus respuestas:

- Dos conos o dos cilindros que tienen igual volumen, ¿tienen las mismas dimensiones (altura y base)?, ¿por qué?
- ¿Es posible encontrar el número total de conos o de cilindros que teniendo el mismo volumen tienen diferentes dimensiones?
- ¿Un cono y un cilindro pueden tener igual volumen?, ¿por qué? ¿Es posible establecer alguna relación entre sus dimensiones?, ¿ en qué casos?

COMENTARIO

El análisis se puede comenzar apoyándose en la manipulación de material concreto o en casos numéricos particulares.

d) Analizan situaciones como las siguientes:

- En la tabla se presenta el consumo de agua de algunos artefactos domésticos. Con una boleta de cobro de consumo de agua potable observar cuánto cobra la empresa por cada metro cúbico de agua consumido. Hacer una estimación de cuánta agua se gasta mensualmente sólo con el uso de estos tres artefactos.

	Consumo de agua de algunos aparatos domésticos		
	Ducha	Lavatorio	Expulsión WC
Caudal de aparatos domésticos	0,20 L/s	0,10 L/s	12 L
Uso diario aproximado por persona	6 min	3 min	6 veces

- Discuten con sus compañeros sobre el cuidado del agua como un recurso limitado. Intercambian algunas técnicas que permitan ahorrar agua.
- Analizan la siguiente afirmación:

  En Chile la normativa señala que la capacidad mínima de los estanques de WC es de 13 litros. Está en estudio reducirla a 7L. El ingenio popular ha inventado la técnica de introducir en el estanque botellas con arena.

  - Comentan la validez de esta propuesta para ahorrar agua: ¿en qué se fundamenta?

e) Un laboratorio farmacéutico tiene que enviar una mercadería a un cliente de Lima. Los productos se encuentran embalados en cajas de las siguientes características:

Productos	**Cantidad de cajas**	**Peso en kg**	**Dimensiones en metros**		
Frunaco	20	35	0,40	0,38	0,30
Vapofli	25	30	0,45	0,16	0,30
Azitrum	18	8	0,28	0,21	0,12
Babypan	30	22	0,55	0,40	0,35

La persona encargada del envío consulta diferentes compañías de transporte de carga, encontrando las siguientes ofertas:

TRANSPORTES MARÍTIMOS

¿Quiere saber el valor de sus próximos envíos vía marítima?

Para ello, utilice el número mayor, sea éste el del volumen en m^3 o el del peso en toneladas, y multiplíquelo por 120 dólares.

Así, si usted quiere enviar una carga de $\frac{1}{2}$ tonelada, cuyo volumen es de 2 m^3, el valor del envío será de 240 dólares. Y, si usted debiera enviar una caja de 8 toneladas, con un volumen de 5 m^3, el valor será de 960 dólares.

TRANSPORTES AÉREOS

¿Su empresa necesita saber cuánto vale enviar sus productos por vía aérea?

Haga usted mismo los cálculos, aplicando la fórmula siguiente:

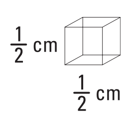
Volumen en m^3 • 580,4 dólares.

De este modo, si su empresa debe hacer un envío de 5 m^3 deberá cancelar la suma de 2.902 dólares.

¿Qué medio de transporte resulta más conveniente para enviar la carga de fármacos?, ¿por qué?

2. Resuelven problemas como los siguientes:

a) Se tiene una caja en forma de cubo, cuyas caras correspondan a regiones cuadradas de lado 2 cm, ¿cuántos cubos de arista $\frac{1}{2}$ cm se puede introducir en la caja?



- Se tiene un paralelepípedo recto de base rectangular cuya área es de $8cm^2$ y de altura 5 cm, ¿cuántos cubitos de 0,25 cm de arista caben en el interior del prisma?

b) Analizan preguntas tales como las siguientes, buscan argumentaciones para fundamentar sus respuestas:

- ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que dos conos o dos cilindros de igual volumen sean iguales?
- ¿Un cono y una pirámide pueden tener igual volumen?, ¿por qué?

c) En una empresa de producción de perfumes planean lanzar al mercado un nuevo producto, el cual irá contenido en una botella en forma de cono. Los diseñadores desean determinar el tipo de caja a utilizar. Las opciones son una caja cilíndrica, una en forma de paralelepípedo recto o una que tenga la misma forma de la botella. Las dimensiones de la botella son las siguientes: altura 10 cm y radio de la base 2,5 cm.

   ¿Con cuál de los tres tipos de caja se pierde más espacio? ¿Con cuál de los tres tipos de caja se desperdicia menos papel?

Actividad 7

Determinan área total de prismas rectos, cilindros y conos. Establecen relaciones entre el área lateral, total y el volumen de prismas rectos, cilindros y conos rectos. Investigan posibilidades de prismas rectos, cilindros o conos que tengan igual volumen y distinta área total.

Ejemplos

1. Dadas dos hojas de papel de igual tamaño, cuyo largo sea el doble, el triple, el cuádruple, etc. del ancho, construyen a partir de dobleces horizontales en una de las hojas, y verticales en la otra, dos paralelepípedos (abiertos) de caras laterales congruentes entre sí.

- Determinan su área lateral, conjeturan sobre sus volúmenes y la relación entre ellos.
- Calculan el volumen de ambos prismas y comprueban sus conjeturas.
- Establecen conclusiones que relacionan las dimensiones de la hoja de papel (razón entre los lados), los volúmenes de ambos prismas y las áreas laterales.

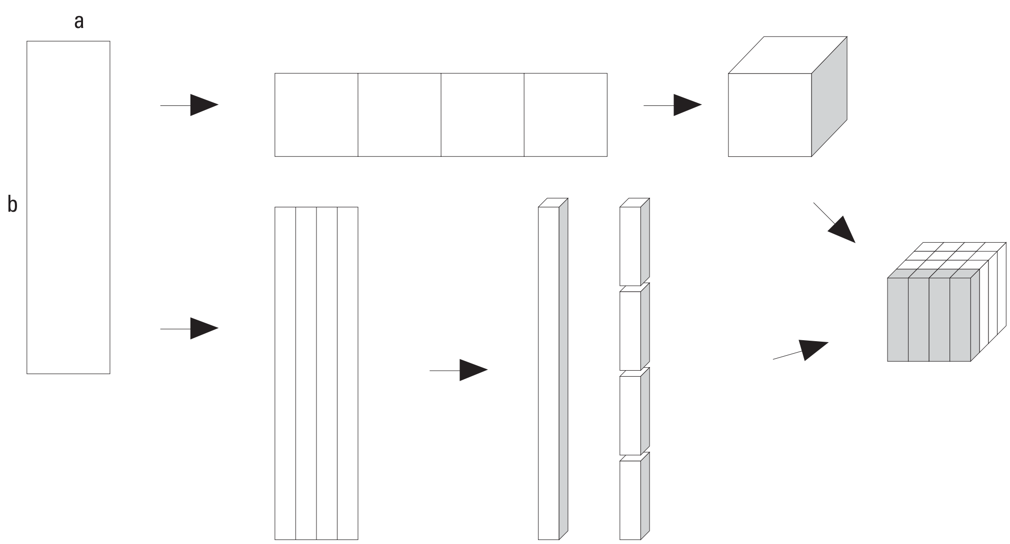
a) Construyen dos paralelepípedos a partir de una hoja de papel de 10 cm de ancho y 40 cm de largo. Determinan ambos volúmenes. Relacionan este volumen con el litro y partes de litro. Establecen conclusiones que relacionan las dimensiones de la hoja de papel (razón entre los lados), los volúmenes de ambos prismas y sus equivalencias en litros.

b) Analizan formas y tamaños de prismas que tengan igual volumen y distinta área total. Repiten la experiencia con cilindros y conos. Establecen conclusiones en relación con el radio y altura de los conos y cilindros para obtener volúmenes equivalentes.

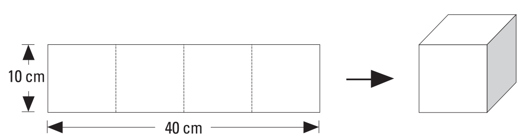
COMENTARIO

Con esta actividad se pretende que a través de situaciones puedan analizar y establecer conjeturas, ponerlas a prueba e integrar otros contenidos como, por ejemplo, razones entre cantidades. En el caso de los ejemplos de construcción de paralelepípedos con hojas de papel, el objetivo es que los alumnos y las alumnas relacionen que la razón que existe entre los lados de la hoja de papel es la misma que entre la de sus volúmenes.

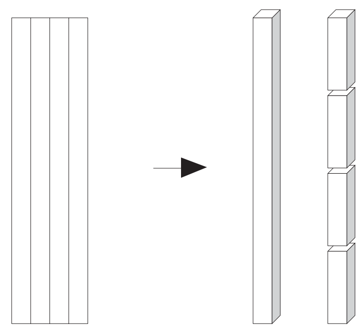
Es posible realizar una exploración empírica para poner a prueba las conjeturas y luego realizar los ejemplos más analíticamente, a través del uso de las fórmulas de volumen. La experimentación se puede realizar repitiendo los pasos indicados en el dibujo que sigue, pero variando las relaciones entre los lados de la hoja. En el dibujo se muestra la relación entre los volúmenes de los cuerpos cuando la relación escogida entre los lados de la hoja es b = 4a (el largo es el cuádruple del ancho).



En este caso es fácil visualizar que el volumen de un paralelepípedo es el cuádruple del otro, al igual que el largo de la hoja es el cuádruple del ancho, por lo tanto, es posible que los estudiantes establezcan conjeturas respecto a la relación entre los volúmenes de ambos paralelepípedos. En el caso del ejemplo en que las medidas son 10 y 40 cm, lo interesante es que el volumen de uno de los prismas es un litro, es decir, $(10\text{ cm})^3$, y el del otro es $\frac{1}{4}$ de litro. Se sugiere realizar una verificación numérica de las conjeturas. Según sea el nivel de los alumnos y alumnas, es posible realizar una verificación algebraica. A continuación se presenta un ejemplo de verificación numérica:



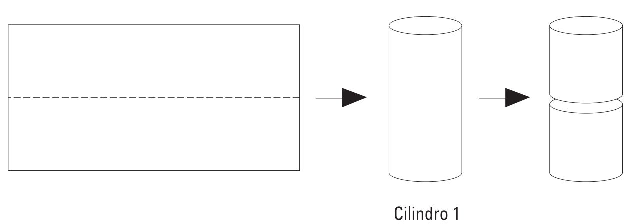
V(cubo) = $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000\text{ cm}^3$ = 1 litro



V(paralelepípedo) = $40 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 250 \text{ cm}^3 = \frac{1}{4}$ litro

Por lo tanto, el volumen del cubo es el cuádruple del volumen del paralelepípedo.

2. Dadas dos hojas de papel, cuyo largo sea el doble, el triple, el cuádruple, etc. del ancho, se cortan en un mismo sentido para formar cilindros. Con una hoja de papel se obtienen dos cilindros de igual altura, y con la otra se obtiene un cilindro cuyo perímetro basal es el doble del perímetro basal de cada uno de los cilindros que se generaron anteriormente, tal como muestra la figura siguiente:

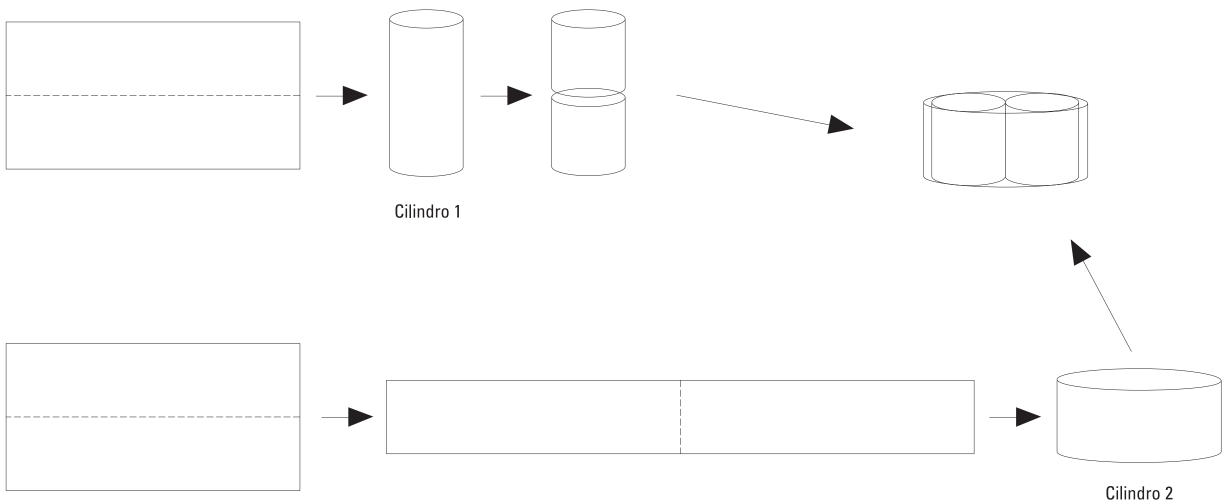


- Para cada cilindro obtenido determinan su área lateral, conjeturan sobre sus volúmenes y la relación entre ellos.
- Calculan el volumen de los cilindros y comprueban sus conjeturas.

- Establecen conclusiones que relacionan los volúmenes de los cilindros y sus áreas laterales.

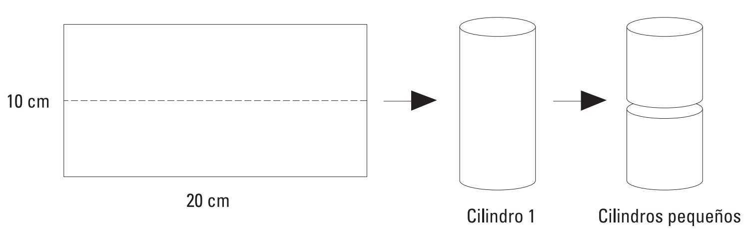
COMENTARIO

Lo que se pretende con este ejemplo es mostrar, al igual que en el Ejemplo 1, que dos cuerpos puden tener igual área lateral, pero distinto volumen. Una forma de apoyar el establecimiento de conjeturas es realizando la actividad concreta como se muestra en el siguiente dibujo.



Es interesante también verificar la conjetura con un análisis numérico, utilizando las fórmulas de área, perímetro y volumen. Según sea el nivel de los estudiantes, es posible realizar una verificación algebraica. A continuación se presenta un ejemplo de verificación numérica y otra algebraica:

Verificación numérica:

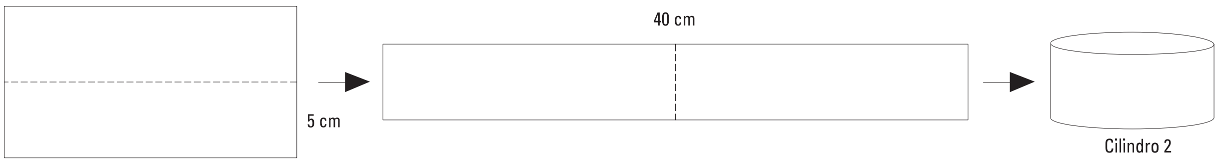


P(cara basal) = 20 = $2\pi \cdot r$, entonces $r = \frac{10}{\pi}$

A(cara basal) = $\pi \cdot r^2 = \frac{100}{\pi}$

V(un cilindro pequeño) = h • A(cara basal) = $5 \cdot \frac{100}{\pi} = \frac{500}{\pi}$

V(cilindro 1) = $\frac{1000}{\pi}$



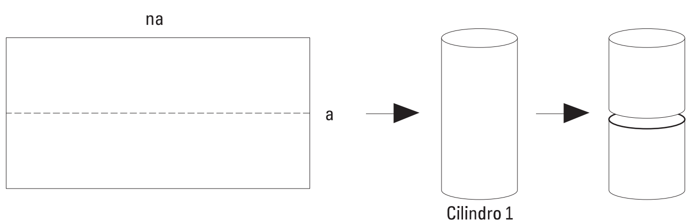
P(cara basal) = 40 = $2\pi \cdot r$, entonces $r = \frac{20}{\pi}$

A(cara basal) = $\pi \cdot r^2 = \frac{400}{\pi}$

V(cilindro 2) = h • A(cara basal) = $5 \cdot \frac{400}{\pi} = \frac{2000}{\pi}$

Por lo tanto, el volumen del cilindro 2 es el doble del volumen del cilindro 1.

Verificación algebraica:

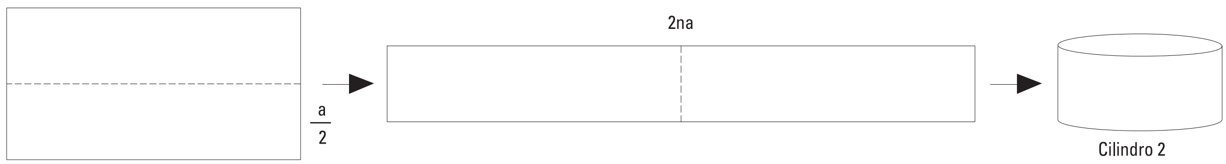


P(cara basal) = na = $2\pi \cdot r$, entonces $r = \frac{na}{2\pi}$

A(cara basal) = $\pi \cdot r^2 = \frac{\pi\, n^2a^2}{4\pi^2} = \frac{n^2a^2}{4\pi}$

V(un cilindro pequeño) = h • A(cara basal) = $\frac{n^2a^2}{4\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{n^2a^3}{8\pi}$

V(cilindro 1) = $\frac{n^2a^2}{4\pi} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = \frac{n^2a^3}{4\pi}$



P(cara basal) = 2na = 2 $\pi \cdot$ r , entonces r = $\frac{2na}{2\pi} = \frac{na}{\pi}$

A(cara basal) = $\pi \cdot r^2 = \pi(\frac{na}{\pi})^2 = \frac{n^2 a^2}{\pi}$

V(cilindro 2) = h • A(cara basal) = $\frac{n^2 a^2}{\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{n^2 a^3}{2\pi}$

Por lo tanto, el volumen del cilindro 2 es el doble del volumen del cilindro 1.

Actividad 8

Investigan los efectos en el volumen y área lateral total de un prisma recto, pirámide recta, cono o cilindro al variar sus elementos; y, a la inversa, los efectos en la longitud de los elementos de estos cuerpos al variar el volumen.

Ejemplo

Resuelven los siguientes problemas:

a) Realizan una investigación sobre la modificación de redes o cajas que representan prismas rectos. Realizan distintas variaciones y establecen conclusiones. Algunas variaciones pueden ser en prismas, pirámides, cilindros y conos:
   - Si la base se mantiene constante y la altura varía, ¿qué ocurre con el volumen?
   - Si la base cambia de longitudes (en el caso de los prismas: rectángulos diferentes o triángulos diferentes), pero su área total es igual y la altura se mantiene, ¿qué ocurre con el volumen?, ¿qué ocurre con el volumen si disminuye el área de la base a la mitad, pero la altura aumenta al doble?, ¿qué condiciones se deben cumplir para que el volumen no varíe?, ¿se mantiene esta condición en el caso de los cilindros y los conos?

COMENTARIO

Se recomienda que en esta actividad se visualicen primero los efectos en las fórmulas y luego, de a poco, acercarse a un trabajo algebraico y al manejo de ecuaciones.

b) En una empresa de conservas están haciendo una revisión de sus envases. En este análisis desean determinar la cantidad de material que se utilizaría al modificar las dimensiones del tarro:
   - modificar al doble el radio
   - modificar al doble la altura
   - modificar al doble la altura y a la mitad el radio
   - modificar al doble el radio y a la mitad la altura

COMENTARIO

Para realizar esta pequeña investigación se sugiere incentivar a los alumnos y alumnas a utilizar y manipular las fórmulas de cálculo de volúmenes que se establecieron en las actividades anteriores. Y a partir de éstas, hacer un trabajo de exploración, modificando el radio y la altura según se indica en cada caso. De esta manera, se realiza una aproximación al trabajo algebraico de las fórmulas.

Actividades propuestas para la evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de ellas están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores
Analizan y resuelven problemas que implican calcular y comparar volúmenes y áreas laterales de diferentes cuerpos geométricos para encontrar y fundamentar soluciones. En una fábrica se confeccionan cajas de distintas formas y tamaños. Las caras basales de las cajas son de un material más resistente que el de las caras laterales y que el manto, en el caso de las cajas cilíndricas. Las cajas solicitadas por un nuevo cliente son de forma de cubo, de paralelepípedo recto y cilíndricas, y deben tener un volumen de 125.000 cm^3. ¿De qué dimensiones pueden ser las cajas? ¿En cuáles de ellas se utiliza menos material? Considerando que el material de las bases vale el doble que el de las caras laterales, ¿cuál de ellas resultaría más barata?	• Reconocen que el volumen de las cajas es de 125.000 cm^3. • Utilizan la fórmula V = altura • área de la base • Buscan las distintas posibilidades de valores que puede tomar la altura y el área de la base. • Analizan las dimensiones centrándose en cada tipo de cuerpo geométrico y en sus respectivas características. • Entregan resultados correctos para las dimensiones de los cuerpos. • Proponen una solución razonable y fundamentada.
Analizan situaciones en que se producen variaciones en el volumen u otros elementos de cuerpos geométricos, establecen conclusiones y encuentran soluciones pertinentes. Un comerciante desea modificar las cajas que utiliza en su fábrica para embalar los productos.	• Calculan correctamente el volumen de la caja inicial. • Reconocen que deben calcular sólo el área del manto de cada uno de los dos cilindros.

Hasta ahora las cajas eran de forma cilíndrica con una altura de 20 cm y un radio de 6 cm y se desea aumentar al doble el radio pero mantener las dimensiones de la altura.

¿Cuánto papel más se necesita para el manto del nuevo cilindro respecto a lo que se necesitaba en la caja inicial?

- Relacionan el ancho del manto con el perímetro del cilindro.
- Calculan correctamente el perímetro de la base de los cilindros, aumentando en un caso al doble el radio de la base del cilindro.
- Calculan correctamente el área del manto de ambos cilindros.
- Establecen la relación con el área del manto del cilindro inicial.

- ¿En cuánto varía el volumen respecto al cilindro anterior?

- Calculan el volumen del cilindro inicial y del nuevo cilindro cuyo radio es el doble del inicial.

- Si se aumenta al doble la altura y se mantiene constante el radio, ¿cuánto papel se necesita para el manto del nuevo cilindro respecto a lo que se necesitaba antes? ¿En cuánto varía el volumen respecto al cilindro anterior?

- Comparan los resultados a través del cuociente.
- Reconocen que en este caso el perímetro basal no varía.
- Calculan el área del manto del nuevo paralelepípedo cuya altura mide el doble.

- Si se tiene una caja en forma de paralelepípedo y se varía al doble cada lado de la base y se mantiene constante la altura, ¿en cuánto varía el volumen respecto al paralelepípedo anterior?

- Comparan el área basal del nuevo paralelepípedo con la del inicial. Establece una razón.
- Calculan el volumen del nuevo paralelepípedo.

- Si se disminuye a la cuarta parte la altura y se mantiene la base, ¿en cuánto varía el volumen respecto al paralelepípedo anterior?

- Comparan el volumen del nuevo paralelepípedo con el inicial y determinan la diferencia (variación).

Bibliografía recomendada Educación Matemática NB6

Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra, (1996). *Enseñar matemáticas*. GRAO, Madrid.

Corbalán, Fernando, (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. GRAO, Madrid.

Dickson, L.; Brown M. y Gibson, O., (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor S.A., Barcelona.

Gálvez, G.; Navarro, S.; Riveros, M. y Zanocco, P., (1994). *Aprendiendo matemáticas con calculadora*. Ministerio de Educación, Santiago de Chile.

Gardner, Martín, (1994). *Matemáticas para divertirse*. Zugarto, España. Colección.

Holt, Michael, (1987). *Matemáticas recreativas 2*. Ediciones Martínez Roca, Barcelona.

Instituto Nacional de Estadísticas, INE, (1999). *Estadísticas de Chile en el Siglo XX*. Santiago.

Johnson, Christine, (1994). *Packaging and the Enviroment*. Addison-Wesley Publishing Company.*

Kamii, Constance, (1989). *Reinventando la Aritmética II*. Ed. Visor Distribuciones, Madrid.

Morris, Kline, (1984). *El fracaso de las matemáticas modernas: ¿por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI, Madrid.

Perelman, Y., (1987). *Matemáticas recreativas*. Ediciones Martínez Roca, Barcelona.

Riveros, M. y Zanocco, P., (1992). *Geometría: aprendizaje y juego*. Ed. Universidad Católica de Chile.

Severo, J. y Ferrari, G., (1994). *Olimpíadas matemáticas*. Ñandú, Buenos Aires.

Vargas-Machuca, Inmaculada; González, José Luis y otros, (1990). *Números Enteros. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. Editorial Síntesis, Madrid.

(*) Aunque este libro no está en castellano es de muy fácil lectura. Se recomienda porque propone actividades interesantes que se pueden adaptar a los estudiantes chilenos.

Bibliografía consultada para la elaboración del programa*

Corbalán, Fernando, (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. GRAO, Madrid.

Balbuena Corro, Hugo; Block Sevilla, David; Dávila Vega, Martha y otros. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Taller para maestros. 1° parte. Secretaría de Educación Pública, México.

Bosch, M.; Compta, A.; Gascón, J. y otros, (1996). *Matemáticas*. 2° ciclo ESO/ 1er curso. Nivel 1 y 2. Editorial Almadraba. Barcelona, España.

Groupe D'enseignement Mathématique, (1994). Serie: De question en question, *Mathématiques 1*. Editorial Didier Hatier, Bruselas, Bélgica.

Groupe D'enseignement Mathématique, (1994). Serie: De question en question, *Mathématiques 2*. Editorial Didier Hatier, Bruselas, Bélgica.

Groupe D'enseignement Mathématique, (1994). Serie: De question en question, *Mathématiques 3*. Editorial Didier Hatier, Bruselas, Bélgica.

Secretaría de Educación Pública, (1997). *Libro para el maestro de Educación Secundaria*. Educación Matemática. México.

Universidad Academia de Humanismo Cristiano. *Texto de Educación de Adultos*. 1° a 4° Medio. Santiago de Chile.

* Varios problemas propuestos han sido adaptados de estos textos.

Programas computacionales

Softwares educativos:

Mates Blaster 2: El secreto de la ciudad perdida. Este software ha sido diseñado para el desarrollo y aplicación del cálculo básico en los alumnos y alumnas de segundo ciclo de Educación Básica, con números naturales, fracciones y decimales, porcentajes. Estos conocimientos se desarrollan a través de historias divertidas, juegos y múltiples aplicaciones multimediales.

Razonamiento y deducciones 3. Programa que ayuda a los niños y niñas a desarrollar su capacidad para resolver problemas, desarrollar habilidades como: creatividad, razonamiento crítico y memoria.

Software de productividad. Las planillas electrónicas son un buen aporte especialmente para el tratamiento de información, como lo menciona el programa, porque permite ingresar datos en tablas que pueden ordenarse de acuerdo a diferentes criterios, y utilizar un variedad de funciones, entre ellas, de estadísticas para determinar: promedios, media, moda, mediana. Además, permiten el análisis estadístico de los datos e incorporar los gráficos de acuerdo a la información que se esté trabajando. También son útiles para comprobar predicciones.

Más que desarrollar el trabajo intentando que los estudiantes conozcan de memoria o mecánicamente algunas expresiones equivalentes, se podría utilizar la planilla de cálculo para mostrar cómo una fracción se transforma en un decimal y luego expresar éste como porcentaje. Esto les permitiría encontrar razones de equivalencia entre expresiones fraccionarias, decimales y porcentajes.

Cabri Geometre, disponible en el sitio Web: http://www-cabri.imag.fr
Software muy completo que permite aprender geometría en forma interactiva. Permite trabajar, entre otros, los conceptos de simetría, área de un triángulo, ampliación y reducción de figuras geométricas para visualizar qué ocurre con su área y perímetro, construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos, etc.

Juega con las Matemáticas: Desde una máquina del tiempo se viaja a antiguas civilizaciones donde se debe resolver problemas aritméticos para desarrollar los hábitos del cálculo numérico, trabajar con formas geométricas y aprender a medir y ordenar.

Sitios en internet

(Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).

Unidad I. Polígonos y circunferencia
http://www.ti.com/calc/latinoamerica/cabri.htm)

Unidad II. Relaciones proporcionales
http://frontpage.teleweb.pt/~jseixas/id113.htm

Unidad III. Números enteros y ecuaciones
http://msip.lce.org/jahumada/mrsg1010/uni2menu.htm

Unidad IV. Potencias
http://www.platea.pntic.mec.es/~anunezca/Potencias/lecciones.htm
Otro sitio interesante de este tipo es: http://www.lasalvacion.com/matematicas. El estudiante escribe el tema de matemática en que desea ser ayudado.

Unidad V. Volumen
http://www.lasalvacion.com/matematicas. El estudiante escribe el concepto o tema de matemática en que desea ser ayudado, por ejemplo: poliedros.
http://www.personal.redestb.es/javfuetub/index.htm
http://www.escolar.com/geometr/13cuerpos.htm
http://www.icarito.tercera.cl/icarito/1999/icaro/722/

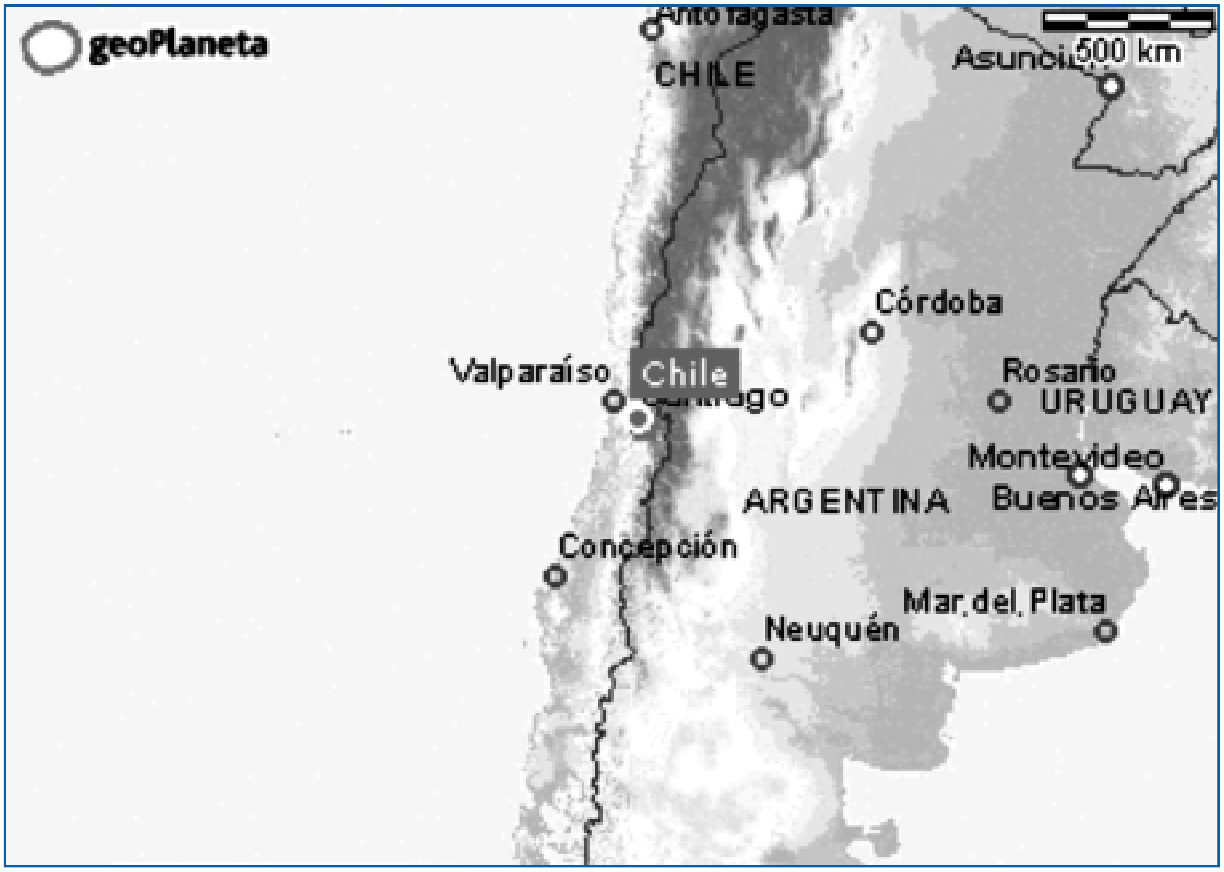
Anexo 1: Ejemplos de mapas dibujados a diferentes escalas

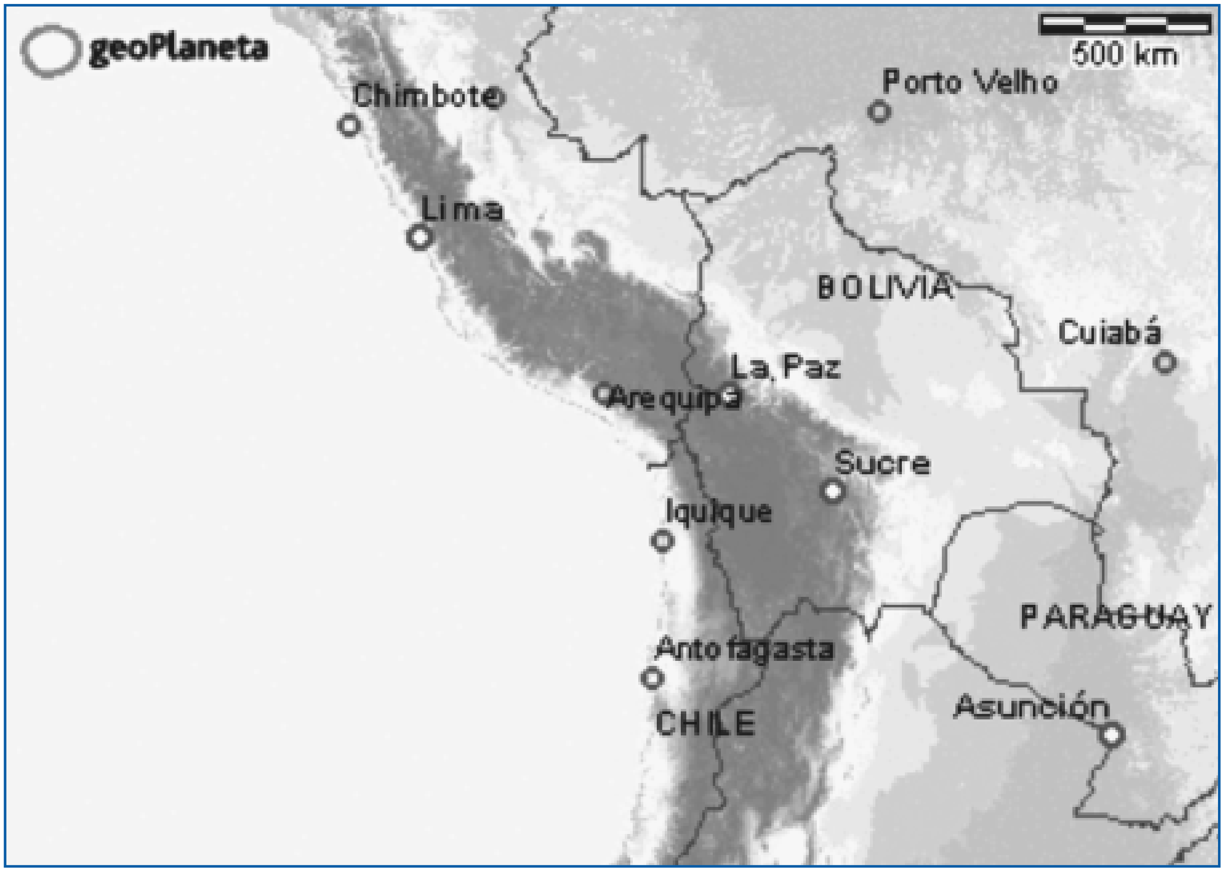

Chile
0 300 Millas
0 300 Kilómetros
MAPQUEST.COM
PERÚ
BOLIVIA
PARAGUAY
BRASIL
Arica
Iquique
Antofagasta
Volcán Llullaillaco 6.723 m (22.057 pies)
Trópico de Capricornio
20° S
La Serena
Cerro Aconcagua 6.960 m (22.834 pies)
Viña del Mar
Valparaíso
Islas Juan Fernández (Chile)
Rancagua
Santiago
Talca
URUGUAY
Talcahuano
Concepción
ARGENTINA
30° S
Temuco
Valdivia
Osorno
Puerto Montt
Isla de Chiloé
OCÉANO PACÍFICO
OCÉANO ATLÁNTICO
Arch. de los Chonos
Coihaique
Península de Taitao
Cerro San Valentín 4.035 m (13.238 pies)
Cordillera de Los Andes
40° S
Arch. Reina Adelaida
Islas Malvinas (R.U./bajo reclamación Argentina)
Punta Arenas
Tierra del Fuego
Estrecho de Magallanes
Cabo de Hornos
120° O
110° O
100° O
90° O
80° O
70° O
50° O
40° O
30° O


América del Sur
AMÉRICA DEL NORTE
MAPQUEST.COM
ÁFRICA
Venezuela
Guyana
Surinam
Colombia
Guayana Francesa (Francia)
Ecuador
Islas Galápagos (Ecuador)
Amazonas
0°
Ecuador
Vichada
Amazonas
Brasil
Meseta Central
Perú
OCÉANO PACÍFICO
Bolivia
Paraguay
Gran Chaco
Islas San Félix y San Ambrosio (Chile)
20° S
Trópico de Capricornio
Chile
Uruguay
Islas Juan Fernández (Chile)
Cordillera de Los Andes
Pampas
Argentina
OCÉANO ATLÁNTICO
0 1.000 Millas
0 1.000 Kilómetros
Patagonia
Islas Malvinas [Islas Falkland] (R.U. / bajo reclamación Argentina)
40° S
140° O
120° O
100° O
80° O
60° O
40° O
20° O
0°


PERU
BOLIVIA
South
Pacific
Ocean
Arica
Iquique
Atacama Desert
Antofagasta
PARAGUAY
Isla San
Ambrosio
Chañaral
Isla
San Félix
La Serena
Valparaíso
SANTIAGO
San Antonio
Rancagua
Archipiélago Juan
Fernández
ARGENTINA
Talcahuano
Concepción
Lebu
Temuco
Puerto Montt
South
Atlantic
Ocean
Easter Island and
Sala y Gomez are
not shown.
Strait of
Magellan
Punta Arenas
0 200 400 km
0 200 400 mi


geoPlaneta
BOLIVIA
1.000 km
PARAGUAY
CHILE
Chile
URUGUAY
ARGENTINA


geoPlaneta
CHILE
500 km
Córdoba
Valparaíso
Chile
Rosario
URUGUAY
Montevideo
ARGENTINA
Buenos Aires
Concepción
Mar del Plata
Neuquén


geoPlaneta
500 km
Chimbote
Porto Velho
Lima
BOLIVIA
Cuiabá
La Paz
Arequipa
Sucre
Iquique
PARAGUAY
Antofagasta
Asunción
CHILE


Golfo de México
OCÉANO
ATLÁNTICO
TRINIDAD
Y TOBAGO
VENEZUELA
GUYANA
SURINAM
COLOMBIA
ECUADOR
PERÚ
Lima
BRASIL
Brasilia
BOLIVIA
La Paz
PARAGUAY
Asunción
OCÉANO
PACÍFICO
Golfo
de
Arica
CHILE
Santiago
URUGUAY
Montevideo
Buenos
Aires
ARGENTINA
OCÉANO
ATLÁNTICO

Anexo 2: Encuestas de opinión

A continuación se presenta, como ejemplo, una encuesta y el sitio web del cual se extrajo y desde el cual se puede actualizar.

Encuesta CEP

Mapa de la religiosidad en Chile:
¿cuán religiosos somos los chilenos?

Puntos salientes

Hoy en Chile 8 de cada 10 personas tiene plena certeza de que Dios existe. Un 14% tiene dudas. Asimismo, la creencia en Dios es mayor entre las mujeres y el grupo de 55 años o más. En nuestro país ser ateo es un hecho extraordinario: sólo un 2% de los encuestados señala no creer en Dios.

Chile es un país mayoritariamente católico, un 72% de los encuestados dice pertenecer o sentirse cercano a esta iglesia. Un 16% se declara evangélico, un 7% afirma no tener religión, un 4% adhiere a otras religiones y un 1% no contesta.

Un 18% de los encuestados practica su culto, asistiendo a la iglesia o templo una vez por semana o más frecuentemente. Este grupo ha sido definido como observante. En los últimos 3 años en Chile se ha producido un fenómeno de declinación de la observancia religiosa en la población desde un 27% en 1995 al actual 18%.

A medida que cae el estrato socieconómico aumenta el porcentaje de evangélicos observantes y disminuye el de católicos observantes. Hoy en el estrato socioconómico bajo encontramos la misma cantidad de observantes católicos que de evangélicos observantes. Este fenómeno ya había sido observado por los investigadores del CEP Arturo Fontaine Talavera y Harald Beyer en un estudio publicado en 1991 en la ***Revista Estudios Públicos.***

En relación al culto privado de la religión, un 32% de los encuestados dice rezar una vez al día y hay un 10% adicional que dice rezar varias veces al día. Un 15% declara que nunca reza. En términos relativos, quienes más rezan son las mujeres y el grupo de 55 años o más. Ocho de cada 10 encuestados cree decidida o probablemente en el cielo.

La creencia en el infierno si bien es menos generalizada, sigue siendo mayoritaria: un 57% cree decidida o probablemente en él.

Estos porcentajes de creencia tanto en el cielo como en el infierno son relativamente estables en todas las edades y niveles educacionales. De acuerdo a estos datos, hoy en Chile, no hay evidencia de que la gente más educada sea menos religiosa.

Un 51% de los encuestados tiene plena o gran cantidad de confianza en las iglesias y organizaciones religiosas. Sin embargo, una amplia mayoría -aproximadamente dos tercios de los encuestados- también considera que las autoridades religiosas no deberían tratar de influir en la forma en la que las personas votan ni en las decisiones de Gobierno.

¿Qué significan estos datos en términos internacionales? ¿Cuán religiosos somos los chilenos en comparación con otros pueblos? Disponemos de información respecto de 9 países. Ordenados de mayor a menor religiosidad el orden es el siguiente: primero, Estados Unidos; segundo, México; tercero, Chile; cuarto, España; quinto, Canadá; sexto, Alemania; séptimo, Gran Bretaña; octavo, Francia; noveno, Suecia.

Mapa de la religiosidad en Chile:

¿Cuán religiosos somos los chilenos?

I. MAPA DE LA RELIGIOSIDAD

Presentación

Universo o Población Objetivo:

Población mayor de 18 años urbana y rural residente a lo largo de todo el país salvo Isla de Pascua.

Marco Muestral Censo de 1992

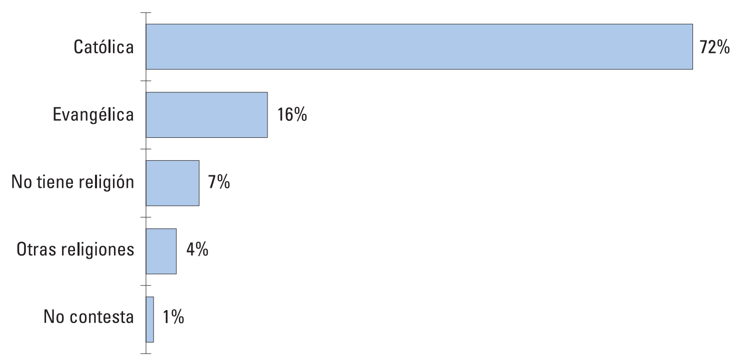
Características de la Muestra

El método de muestreo fue aleatorio y probabilístico en cada una de las etapas. Se entrevistaron a 1.603 personas en sus hogares.

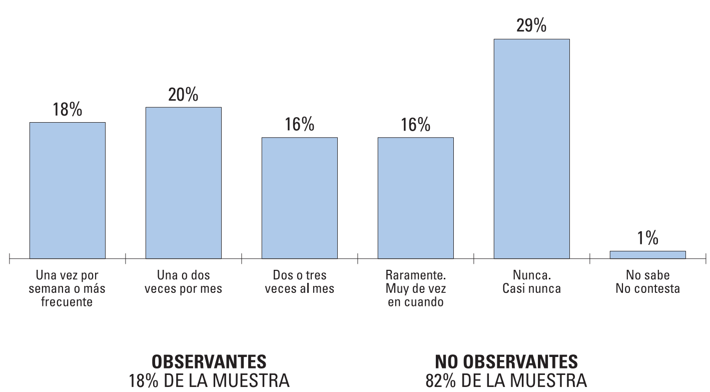
Nivel de Precisión El nivel de precisión se estima en aprox. 3% con un nivel de confianza de 95%.

Fecha de Terreno La recolección de datos se efectuó entre el 8 y el 29 de junio.

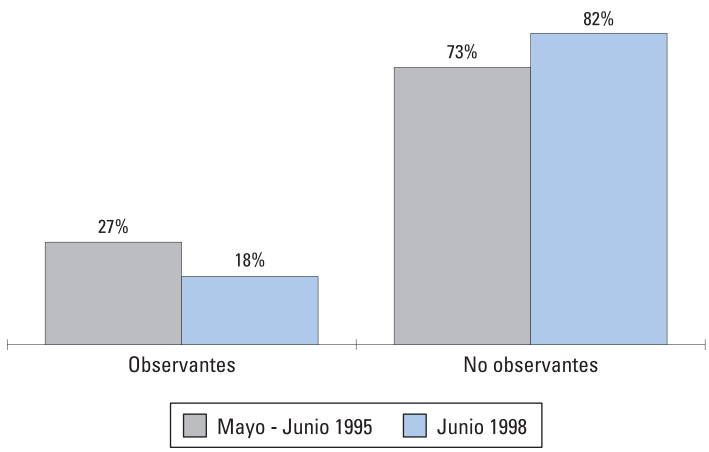
¿Podría Ud. decirme la Religión o Iglesia a la cual pertenece o se siente más cercano?



¿Con qué frecuencia asiste Ud. a la iglesia o practica su culto?



¿Con qué frecuencia asiste Ud. a la iglesia o practica su culto?



Nivel de observancia en las distintas religiones

	Católicos	Evangélicos	Otras religiones
Observantes	15%	38%	31%
No observantes	85%	62%	69%

Observancia por sexo, edad y educación

Sexo		Edad				Educación (en años)			
H	M	18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
12%	24%	11%	17%	19%	26%	14%	20%	15%	22%

Observantes por estrato socioeconómico

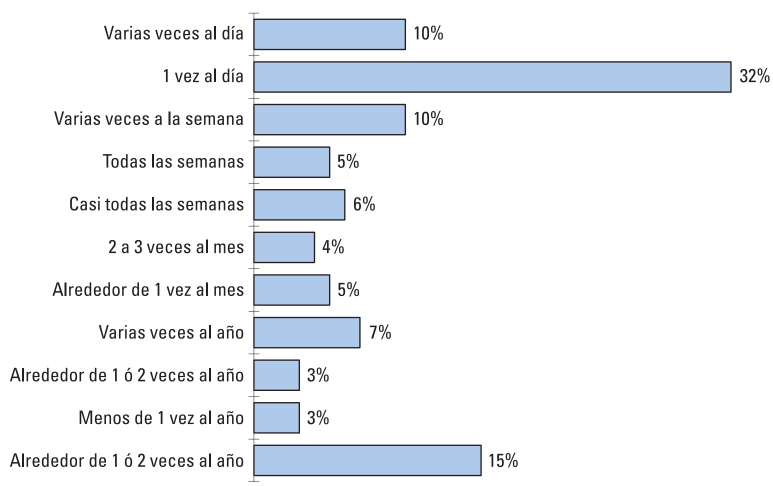
Sexo	NSE Alto	Medio	Bajo
Católicos observantes	90%	72%	44%
Evangélicos observantes	10%	21%	44%
Otras religiones observantes	0%	7%	9%
No sabe / No contesta	0%	0%	3%

¿Ha habido en su vida, alguna vez, un momento decisivo, en el que Ud. hizo un compromiso nuevo y personal con la religión?

Cruzado por las diferentes religiones

	Católicos	Evangélicos	Otras religiones
SI	36%	61%	69%
NO	64%	39%	31%

Pensando en el presente, ¿con qué frecuencia reza Ud.?

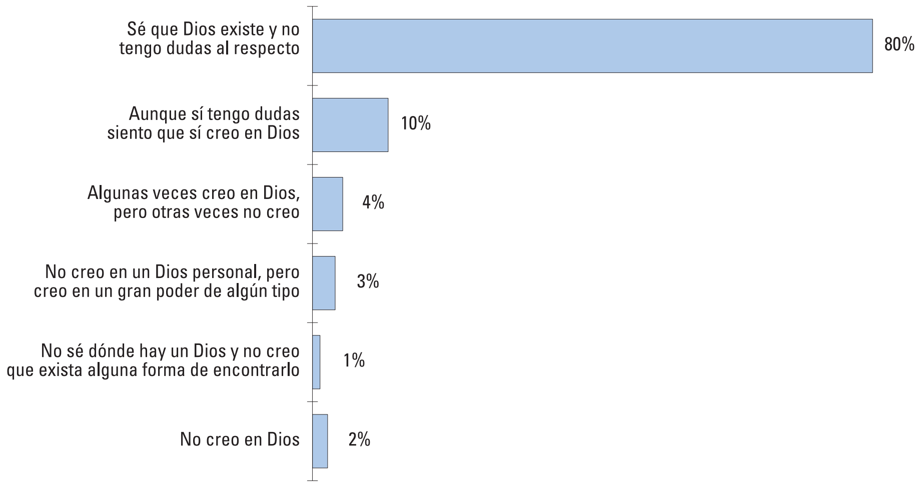


Pensando en el presente, ¿con qué frecuencia reza Ud.?
Porcentaje Alternativas: “1 vez al día” + “Varias veces al día”

Sexo		Edad				Educación (en años)			
H	M	18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
29	54	35	36	44	54	44	45	40	42

II. CREENCIAS RELIGIOSAS

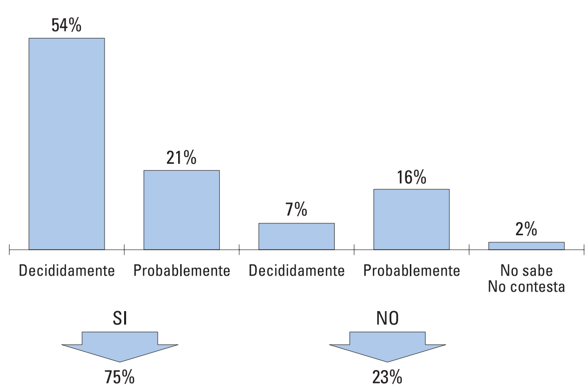
¿Cuál de las afirmaciones de la tarjeta se acerca más a lo que Ud. cree sobre Dios?



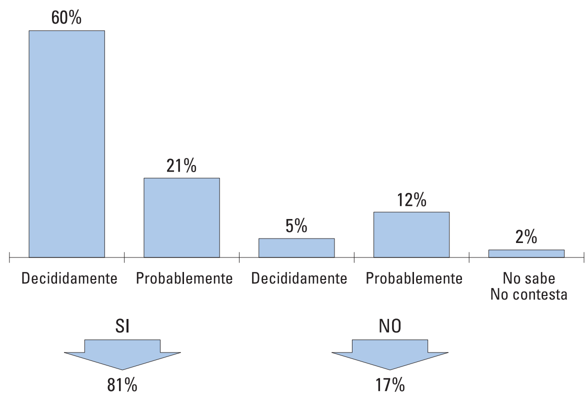
¿Cuál de las afirmaciones de la tarjeta se acerca más a lo que Ud. cree sobre Dios?

Sexo		**Edad**				**Educación (en años)**			
H	M	18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
76	85	71	82	81	87	91	83	78	77

¿Cree Ud. en...?
La vida después de la muerte



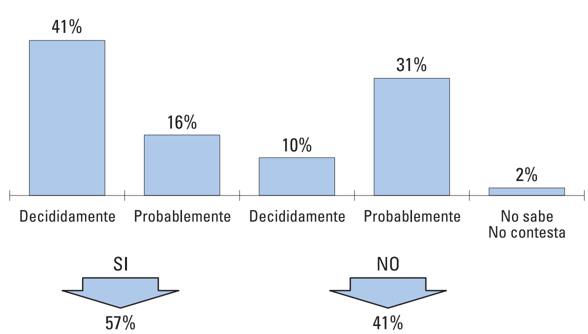
¿Cree Ud. en...?
El cielo



Porcentaje Alternativas:
"Decididamente Sí" + "Probablemente Sí"

Edad				Educación (en años)			
18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
80	87	79	77	86	85	80	74

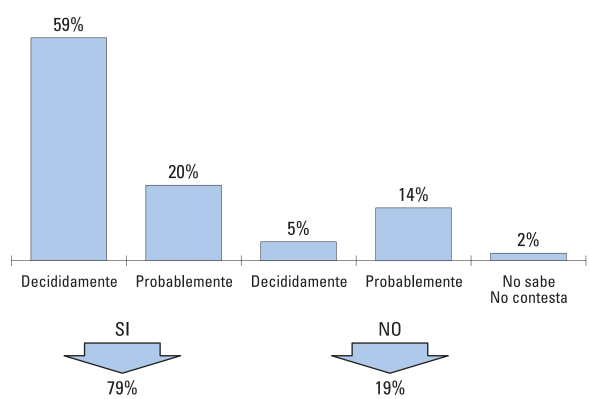
¿Cree Ud. en...?
El infierno



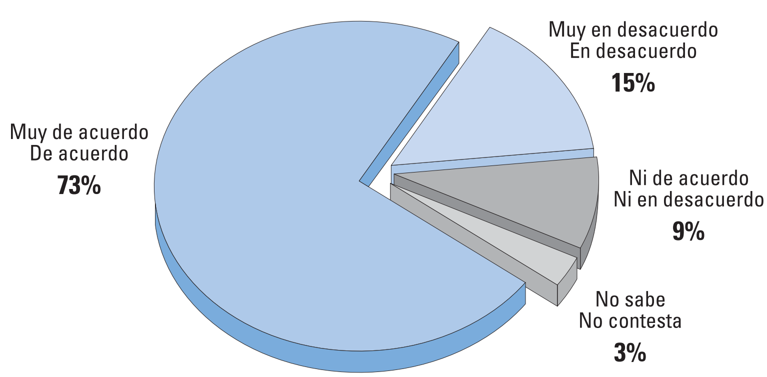
¿Cree Ud. en...?
El infierno
Porcentaje Alternativas: “Decididamente Sí” + “Probablemente Sí”

Edad				Educación (en años)			
18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
54	62	59	55	53	61	59	49

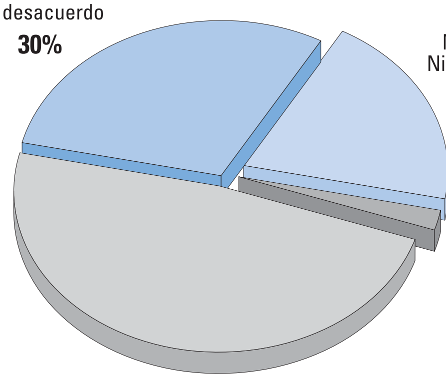
¿Cree Ud. en...?
Los milagros religiosos



¿Está Ud. de acuerdo o en desacuerdo con las siguientes frases...?
“Hay un Dios que se preocupa personalmente de cada ser humano”



“Para mí la vida tiene sentido sólo porque Dios existe”



“Para mí la vida tiene sentido sólo porque Dios existe”

Sexo		**Edad**				**Educación (en años)**			
H	M	18 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - +	0 - 3	4 - 8	9 - 12	13 ó +
43	52	37	45	51	56	67	58	42	32

La fe comparada

	USA	**Suecia**	**Francia**	**Gran Bretaña**	**Alemania**	**España**	**Canadá**	**México**	**Chile**
1. Para mi, la vida tiene sentido sólo porque Dios existe.	59	14	27	25	35	33	34	50	48
2. ¿Con qué frecuencia asiste Ud. a la iglesia o practica su culto? Una vez por semana o más fecuente	44	4	10	18	14	29	27	43	18
3. Porcentaje que dice que cree en el cielo	94	26	27	31	57	50	N/D	N/D	81
4. Porcentaje que dice que cree en el infierno	67	10	15	14	27	34	N/D	N/D	57
Ranking de religiosidad en base a preguntas 1 y 2 (suma simple)	1	9	8	7	6	4	5	2	3

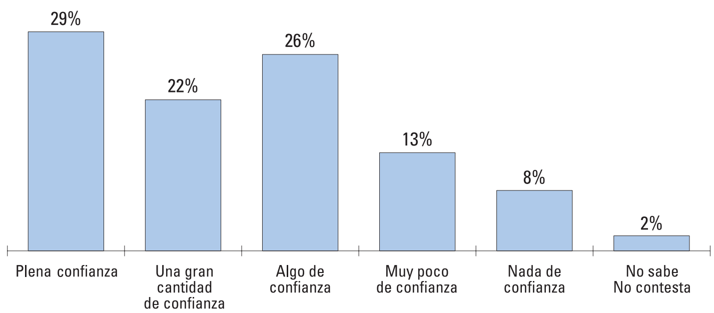
Nota: Suma alternativas “Muy de acuerdo” + “De acuerdo”; Suma alternativas “Decididamente SI” + “Probablemente SI”. Suma alternativas “Decididamente SI” + “Probablemente SI”.

Fuente: Preguntas 1 y 2: “World Values Survey”, 1990 - 1993. Preguntas 3 y 4:Gallup, 1981

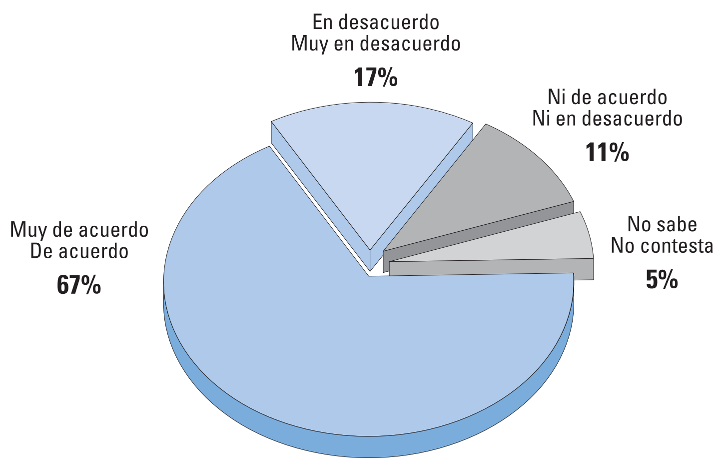
III. PERCEPCION SOBRE IGLESIAS Y AUTORIDADES RELIGIOSAS

¿Cuánta confianza tiene Ud. en...?

Las iglesias y organizaciones religiosas

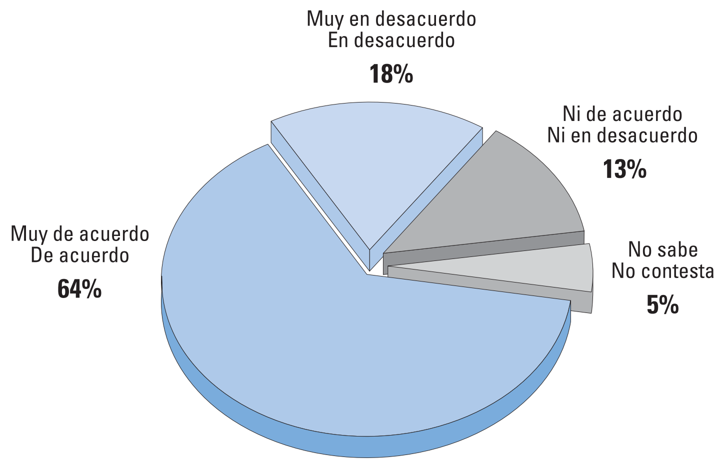


¿Cuán de acuerdo o en desacuerdo está Ud. con cada una de las afirmaciones siguientes?
"Las autoridades religiosas no deberían tratar de influir en la forma en que votan las personas"
Total muestra



“Las autoridades religiosas no deberían tratar de influir en las decisiones de gobierno”

Total muestra



Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Quinto a Octavo Año Básico

Educación Matemática

Objetivos Fundamentales

5º

Quinto Año Básico

NB3

- Procesar información cuantitativa, expresada con números de más de 6 cifras.
- Programar y administrar el uso del tiempo personal.
- Resolver problemas de diversos tipos, referidos a situaciones multiplicativas.
- Seleccionar una forma de cálculo -oral, escrito o con calculadora- a partir de las relaciones entre los números y las exigencias del problema a resolver.
- Aplicar el cálculo aproximado en la evaluación de situaciones y el control de resultados.
- Reconocer la multiplicidad de formas que puede asumir un valor fraccionario.
- Utilizar planos para orientarse en el espacio físico.
- Distinguir elementos de un cuerpo geométrico y establecer correspondencias entre un cuerpo y su representación plana.
- Reconocer elementos en una figura geométrica y analizar los cambios que se producen en la figura al variar la medida de sus ángulos internos.
- Distinguir perímetro y área como elementos uni y bidimensionales en una figura geométrica.
- Percibir la significación de las fórmulas, en tanto medio para expresar relaciones entre magnitudes variables.

6º

Sexto Año Básico

NB4

- Establecer nexos entre las operaciones básicas en los números naturales y reconocer la posibilidad de sustituir unas por otras.
- Conocer prácticas del mundo adulto en las que intervienen números y cálculos y confiar en la propia capacidad para incorporarlas en la resolución de problemas.
- Fundamentar procedimientos de cálculo -orales, escritos y con calculadora- basados en regularidades de los números y en propiedades de las operaciones.
- Resolver problemas que involucren unidades de medida de peso, capacidad y longitud, utilizando las equivalencias entre unidades, expresando los resultados de manera adecuada a la situación.
- Operar con cantidades no enteras utilizando, de acuerdo a la situación, números decimales o fracciones.
- Planificar el trazado de figuras sobre la base del análisis de sus propiedades, utilizando los instrumentos pertinentes.
- Comprender los efectos que provoca en el perímetro o el área de cuadrados y rectángulos la variación de la medida de sus lados y recurrir a las razones para expresarlas.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional, y comunicar resultados.

7º

Séptimo Año Básico

NB5

- Reconocer diferencias fundamentales entre el sistema de numeración y medición decimal y otros sistemas de numeración y medición.
- Apreciar el valor instrumental de las matemáticas en la apropiación significativa de la realidad.
- Atribuir y expresar el significado de grandes y pequeños números utilizando diferentes recursos tanto gráficos como numéricos.
- Anticipar resultados -aproximando y/o acotando- a partir del análisis de las características de los números involucrados en los problemas y de las condiciones de éstos.
- Utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver problemas numéricos y geométricos.
- Analizar familias de figuras geométricas para apreciar regularidades y simetrías y establecer criterios de clasificación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados; seleccionar formas de presentar la información y resultados de acuerdo a la situación.

8º

Octavo Año Básico

NB6

- Utilizar sistemáticamente razonamientos ordenados y comunicables para la resolución de problemas numéricos y geométricos.
- Percibir las posibilidades que ofrece el sistema de numeración decimal para expresar cantidades cualesquiera, por grandes o pequeñas que éstas sean.
- Resolver problemas utilizando las potencias para expresar y operar con grandes y pequeñas cantidades.
- Reconocer que una amplia gama de problemas se pueden expresar, plantear y resolver utilizando expresiones algebraicas simples.
- Estimar y acotar, de manera pertinente y razonable, resultados de operaciones con decimales positivos y negativos; expresarlos en fracciones según posibilidades y conveniencia de acuerdo a la situación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados, utilizando y fundamentando diversas formas de presentar la información y los resultados del análisis de acuerdo a la situación.
- Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos).
- Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas.

Contenidos Mínimos Obligatorios

5º
Quinto Año Básico
NB3

Números naturales

Hasta 1000:

- descomponer números en forma multiplicativa identificando sus factores;
- identificar múltiplos de un número;
- interpretar los factores de un número como sus divisores;
- descomponer números en sus factores primos.

Extensión a la clase de los millones:

- leer, escribir y ordenar números.

En la vida diaria:

- utilizar el calendario para determinar fechas y calcular duraciones, estableciendo equivalencias entre días, semanas, meses y años;
- leer y escribir números utilizando como referente unitario los miles, los millones o los miles de millones.

Multiplicación y división

Determinar resultados en situaciones correspondientes a otros significados (relación proporcional más compleja, comparar...).

Cálculo oral

Redondear números, como estrategia para el cálculo aproximado de sumas, restas, productos y cuocientes.

6º
Sexto Año Básico
NB4

Números en la vida diaria

Resolución de problemas, utilizando la calculadora, que impliquen:

- monedas de otros países, valores de cambio y sus equivalencias;
- uso de documentos y formularios bancarios y comerciales.

Nexos entre las operaciones aritméticas

Desarrollo de razonamientos que conduzcan a reemplazar un procedimiento operatorio por otro equivalente, apoyándose en el carácter inverso de la sustracción respecto de la adición, el carácter inverso de la división respecto de la multiplicación, la interpretación de la multiplicación como adición iterada y la interpretación de la división como sustracción iterada.

Divisibilidad

Aplicación de criterios de divisibilidad (por 2, 3, 5, 9 y 10).

Multiplicación y división de fracciones en situaciones habituales

Análisis de las relaciones entre factores y productos y entre los términos de una división y el cuociente en diferentes casos, cuando intervienen cantidades menores que 1.

7º
Séptimo Año Básico
NB5

Números en la vida diaria

- Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (una décima de segundo en la cantidad de metros que avanza un atleta en ese tiempo; grandes cantidades de dinero en UF, por ejemplo).

Sistema de numeración decimal

- Comparación de la escritura de los números en el sistema decimal con la de otros sistemas de numeración en cuanto al valor posicional y a la base (por ejemplo, egipcio, romano, maya).
- Comparación de la escritura de números, hasta 100, en base diez y en base dos (sistema binario).

Potencias de base natural y exponente natural

- Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada.
- Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes).
- Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3.

Multiplicación y división de números decimales

- Cálculo escrito, mental aproximado y con calculadora en situaciones problemas.
- Análisis de relaciones entre factores y producto y entre los términos de la división y el cuociente para establecer regularidades cuando intervienen cantidades menores que 1.

8º
Octavo Año Básico
NB6

Sistema de numeración decimal

- Asociación de una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo a cada posición en el sistema de numeración.
- Interpretación y expresión de resultados como sumas ponderadas de potencias de 10 en situaciones problemas.

Números enteros

- Interpretación del uso de signos en los números, en la vida diaria, en contextos ligados a: la línea cronológica (AC, DC), la medición de temperatura (bajo 0, sobre 0), la posición respecto del nivel del mar.
- Comparación de números enteros con apoyo en la recta numérica.
- Resolución de problemas que impliquen realizar adiciones y sustracciones, con y sin apoyo en la recta numérica.

Ecuaciones de primer grado

- Noción de igualdad de expresiones algebraicas.
- Traducción de situaciones problemas a ecuaciones con una incógnita.
- Creación de diversos problemas con sentido a partir de ecuaciones con una incógnita.
- Uso de propiedades de los números y de las operaciones para encontrar soluciones.

Cálculo escrito

Utilizar algoritmos de cálculo de productos, con factores menores que 100 y de cuocientes y restos, con divisores de una o dos cifras.

Cálculo con apoyo de calculadora

- utilizar calculadora para determinar sumas, restas y productos en la resolución de problemas;
- utilizar calculadora para determinar el cuociente entero y el resto, en divisiones no exactas.

Fracciones

En situaciones correspondientes a diversos significados (partición, reparto, medida...):

- lectura y escritura;
- comparar y establecer equivalencias;
- ubicar una fracción entre dos naturales, utilizando la recta numérica;
- ordenar e intercalar fracciones, con referencia a la recta numérica;
- encontrar familias de fracciones equivalentes;
- adición y sustracción: realizar cálculos, sustituyendo fracciones por otras equivalentes, cuando sea necesario.

Orientación en el espacio

- interpretar planos urbanos y de caminos, utilizando los puntos cardinales como referencia;
- identificar y crear códigos para comunicar diversos tipos de información, al interior de un plano.

Cuerpos geométricos (cubo, prismas y pirámides)

- armar cuerpos, a partir de sus caras;
- construir redes para armar cubos;
- identificar y contar el número de caras, aristas y vértices de un cuerpo y describir sus caras y aristas.

Figuras geométricas

- diferenciar cuadrado, rombo, rectángulo y romboide a partir de modelos hechos con varillas articuladas;

Fracciones y decimales en la vida diaria

- Cálculo del 50% y del 25% como la mitad y la cuarta parte de una cantidad.
- Expresión del 50%, del 25% y del 10% como: $^{50}/_{100}$, $^{25}/_{100}$ y $^{10}/_{100}$; $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$ y $^{1}/_{10}$; y 0,5, 0,25 y 0,1, respectivamente.
- Uso de unidades del sistema métrico decimal en situaciones habituales.

Números decimales

- Identificación de las fracciones con denominador 10, 100 y 1000, con los décimos, centésimos y milésimos.
- Transformación de fracciones decimales a números decimales y viceversa, en situaciones de medición.
- Extensión del sistema de numeración a décimos, centésimos y milésimos en situaciones cotidianas y/o informativas que permitan:
  - leer, escribir e interpretar números decimales;
  - establecer equivalencias;
  - ordenar e intercalar decimales;
  - estudiar familias de números decimales, establecer patrones y comparaciones con los números naturales.
- Cálculo de adiciones y sustracciones en contextos situacionales, interpretando resultados, aproximando resultados; estimando antes de calcular; utilizando la calculadora para confirmar resultados estimados.

Figuras y cuerpos geométricos

- Reproducción y creación de figuras y de representaciones planas de cuerpos geométricos, usando regla, compás y escuadra.
- Estudio de cuadriláteros: características de sus lados y de sus ángulos.
- Trazado de cuadriláteros a partir de sus ejes de simetría.
- Combinación de figuras para obtener otras previamente establecidas.

Perímetro y área

- Cálculo de perímetro y área de figuras compuestas por cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos.

Proporcionalidad

- Resolución de situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo.
- Interpretación y uso de razones expresadas de diferentes maneras.
- Resolución de problemas, elaborando tablas correspondientes a:
  - situaciones de variación no proporcional.
  - situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Identificación y análisis de las diferentes razones y parejas de razones que se pueden establecer entre los datos de tablas correspondientes a variación proporcional directa e inversa.
- Comparación de tablas correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa, para establecer diferencias.
- Interpretación y expresión de porcentajes como proporciones, y cálculo de porcentajes en situaciones cotidianas.

Figuras y cuerpos geométricos

- Estudio de triángulos: características de sus lados y de sus ángulos.
- Construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos.
- Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.
- Uso de instrumentos (regla, compás, escuadra), para la reproducción y creación de triángulos y para la investigación de las condiciones necesarias para dibujar un triángulo.
- Redes para armar prismas y pirámides. Armar cuerpos geométricos a partir de otros más pequeños.

Perímetro y área

- Medición y cálculo de perímetros y de áreas de triángulos de diversos tipos en forma concreta, gráfica y numérica.
- Investigación de las relaciones entre medidas de altura y base y el área correspondiente, en familias de triángulos generadas al mantener dichas medidas constantes.

Potencias de base natural y exponente entero

- Análisis y comparación de la representación gráfica de a^2 y de a^{-2}.
- Interpretación de a^{-2} y de a^{-3} como $^{1}/_{a^2}$ y $^{1}/_{a^3}$ respectivamente.
- Potencias como multiplicación iterada.
- Análisis de situaciones de crecimiento y de decrecimiento exponencial.
- Investigación de regularidades y propiedades de operaciones con potencias a partir de la resolución de problemas.

Números decimales y fracciones

- Resolución de situaciones problemas en las que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos e infinitos periódicos.
- Aproximaciones convenientes para números decimales infinitos.
- Uso de la calculadora para investigar y establecer patrones en familias de números decimales.

Proporcionalidad

- Elaboración de tablas y gráficos correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa mediante un producto constante y un cuociente constante, respectivamente.
- Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes).
- Realización e interpretación de planos de tipo esquemáticos a escala.
- Cálculo de porcentajes y elaboración y análisis de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado, utilizando calculadora.

- identificar lados, vértices y ángulos en figuras poligonales;
- distinguir tipos de ángulos, con referencia al ángulo recto.

Perímetro y área

- utilizar centímetros para medir longitudes, y cuadriculados y centímetros cuadrados, para medir superficies;
- calcular perímetros y áreas en cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos, y en figuras que puedan descomponerse en las anteriores;
- reconocer las fórmulas para el cálculo del perímetro y del área del cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, como un recurso para abreviar el proceso de cálculo;
- distinguir perímetro y área, a partir de transformaciones de una figura en la que una de estas medidas permanece constante.

- Ampliación y reducción de cuadrados y rectángulos en papel cuadriculado, expresando como razones las variaciones de los lados, el perímetro y el área.
- Análisis del perímetro y el área de familias de cuadrados y rectángulos, generadas a partir de la variación de sus lados.

Tratamiento de la información

Recopilación y análisis de información: comparación de datos, promedio y valor más frecuente.

Tratamiento de información

- Presentación de información en tablas de frecuencias relativas y construcción de gráficos circulares.
- Análisis de información: utilizando como indicador de dispersión el recorrido de la variable, y como medidas de tendencia central, la moda, la media y la mediana.

Figuras y cuerpos geométricos

- Investigación sobre la suma de los ángulos interiores de polígonos y el número de lados de éstos; construcción de polígonos por combinación de otros.
- Investigación de las relaciones entre los ángulos que se forman al intersectar dos rectas por una tercera. Resolución de problemas.
- Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás.
- Construcciones de redes para armar cilindros y conos.

Perímetro, área y volumen

- Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencias y de polígonos.
- Estimación y cálculo del volumen de cuerpos geométricos regulares expresándolos en las unidades pertinentes.
- Relaciones de equivalencia entre unidades de volumen de uso corriente.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros, conos y prismas rectos.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.
- Lectura y análisis de resultados de encuestas de opinión.

"...haz capaz a tu escuela de todo lo grande
que pasa o ha pasado por el mundo."

Gabriela Mistral

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

www.mineduc.cl

Educación Matemática Octavo Año Básico