Poté, co v dubnu skončilo naše čtyřdílné vyprávění o umělé inteligenci, řada čtenářských ohlasů nás přiměla poohlédnout se po dalších lahůdkách z kuchyní vědeckých pracovišť. Snad vám přijde k chuti nový seriál (od téhož šéfkuchaře) s tematikou, jak věříme, neméně zajímavou a ostatně dosti příbuznou.

Když rozkvetou fraktály... (1)

Umění klást ty pravé otázky je důležitější, než umění je řešit.

George Cantor

Vznik a téměř explozivní vývoj počítačů přinesly pokrok v mnoha vědeckých oborech, které by v současné podobě bez této hardwarové podpory nemohly existovat. Počítače najdeme doslova "na každém rohu". Jejich obrovskou výhodou je výpočetní rychlost (i obyčejný PC je schopen řešit úkoly, na kterých by v minulém století museli matematici pracovat celý život) a také vizualizační schopnosti. Ty pomohly zobrazit to, co bylo do té doby jen velmi těžce zobrazitelné a představitelné. Existuje odvětví matematiky, které v tomto směru doslova exceluje. Toto odvětví má svůj název – **fraktální geometrie.**

Historie

Fraktální geometrie je poměrně mladé odvětví matematiky, jehož kořeny sahají až do konce minulého století. Jeho oficiální vznik lze datovat do období před dvaceti lety (70. léta), kdy bylo založeno panem B. B. Mandelbrotem. Inspirovala ho tehdy dvě setkání s geometrickou soběpodobností – při studiu poruch v přenosu telekomunikačních signálů a při studiu fluktuací tržních cen, jejichž průběh byl v dlouhodobém i krátkodobém průběhu podobný. Velkou zásluhu na vzniku fraktální geometrie měl i L. F. Richardson, jenž nasbíral velké množství dat, která později B. B. Mandelbrot využil.

Vzniku fraktální geometrie předcházel růst matematického "podhoubí" v minulém století, kdy byly popsány podivné útvary, jako jsou *Cantorovo diskontinuum*, *Peanova křivka*, *ďábelské schodiště* a další (např. v r. 1872 K. Weierstrass šokoval berlínskou akademii spojitou funkcí, která nemá v žádném bodě derivaci). Na tato fakta někteří matematici reagovali poněkud podrážděně a s odporem (Ch. Hermite v dopise T. Stieltjesovi: *"...odvrátil jsem se s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, kterým jsou funkce bez derivace..."*). Teprve v našem století Mandelbrot ukázal, že tato monstra jsou jen "špičkou ledovce" celé teorie, která dokáže velmi dobře popsat jak geometrický vzhled našeho světa, tak i chování dynamických systémů.

Do doby, než byla fraktální geometrie založena, vládla světu klasická geometrie euklidovská, která byla s úspěchem používána po celá staletí. Její velkou slabinou, kterou si v podstatě nikdo neuvědomoval, bylo to, že neuměla jednoduchým způsobem popsat tak komplikované struktury, jaké vykazují např. objekty na obr. 1 a 2.

Běžné útvary jako kruh, čtverec, koule, trojúhelník a další lze popsat pomocí Euklidovy geometrie poměrně jednoduše a srozumitelně. Například pravoúhlý trojúhelník je plně popsán (každý jeho bod je jednoznačně určen) rovnicí známou každému školákovi: $c^2 = a^2 + b^2$. Jak ale popsat třeba tzv. *Pythagorův strom* na obr. 3? Zde veškeré pokusy o jednoduchý popis selhávají. Abychom mohli tento útvar přesně popsat pomocí Euklidovy geometrie, pak bychom museli sestavit dost složitou a nepřehlednou rovnici. Tento problém při použití fraktální geometrie odpadá.

Dalšími klíčovými vlastnostmi fraktální geometrie jsou tzv. soběpodobnost a soběpříbuznost. Tyto výrazy vyjadřují, že pokud si zvětšíme libovolnou část fraktálního tělesa, pak tento výřez se bude podobat původnímu tělesu. Matematicky lze takto postupovat až do nekonečna, nicméně v reálném světě vždy narazíme na omezující podmínky. Vezměme například hustou spleť kořenů u keřů. Ať si vezmeme libovolný výřez, vždy se bude podobat původnímu celku. Z výřezu si můžeme vzít další výřez atd., až narazíme na poslední nejmenší kořínky, za kterými už nic neleží – není co zvětšovat. To je fyzikální hranice, která v matematickém světě neexistuje (pokud si ji tam úmyslně nezavedeme).

Za otce fraktální geometrie lze B. B. Mandelbrota považovat plným právem. Založil ji svou slavnou knihou “The Fractal Geometry of Nature” (Fraktální geometrie přírody), v níž poprvé představil svět fraktálů v plné kráse. Takřka symbolem pro fraktální geometrii se stala tzv. *Mandelbrotova množina,* “postavená” na Gaussově rovině (obr. 4).

B. B. Mandelbrot se narodil v židovské rodině r. 1924 ve Varšavě. Jeho otec byl obchodník s oděvy a matka zubní lékařka. V r. 1936 se celá rodina přestěhovala do Paříže, kterou však musela opustit ihned po vypuknutí války. Její pouť skončila v městě Tulla. Zde se B. B. Mandelbrot seznámil s mnoha učiteli a vědci, stejnými utečenci jako on.

Celkově se jeho proces vzdělávání klasifikuje jako neuspořádaný a neúplný, nicméně B. B. Mandelbrot úspěšně složil přijímací zkoušky na École Normale a École Polytechnique. Už během těchto testů se projevily jeho vlohy pro geometrickou představivost; ta mu pomohla řešit matematické problémy, při jejichž řešení měl potíže vyplývající z nedostatku vědomostí.

Mandelbrot charakterizoval sebe a svou minulost slovy: “Často, když slýchávám seznam svých povolání, říkám si, jestli vůbec existuji. Jsou to množiny se zaručeně prázdným průnikem.” To v podstatě znamená, že se mu dařilo po dlouhou dobu procházet mnoha obory bez povšimnutí. Začal u IBM, kde se setkal s fraktálními zákonitostmi, stejně jako ve svých ekonomických experimentech. Vždy byl outsiderem, který nekonvenčně přistupoval k zákoutím matematiky, jež nebyla právě v módě, a bádal v oborech, kde nebyl vítán. Své největší myšlenky skrýval, aby mohl publikovat, a přežíval převážně díky důvěře svých zaměstnavatelů z Yorktown Heights. Podnikal výpady i do oborů, jako je ekonomie, ale vždy se stáhl zpět a za sebou zanechával provokující myšlenky, málokdy však fakta podložená souvislou prací.

Jeho první kontakt s fraktálním světem u společnosti IBM nastal při studiu fluktuace cen bavlny na firemním počítači. Každá cena sice byla nepředvídatelná, nicméně stejná posloupnost změn se dala vysledovat i v různých měřítkách jejich zobrazení. Podobný problém se vyskytl i při studiu “náhodných” poruch na telekomunikačních linkách. Zde byl opět objeven princip opakování poruch v určitém měřítku. V jednom momentě se Mandelbrotovi zdálo, že jeho úvahy jsou chybné, protože při určitém “zvětšení” se poruchy vytratily. To však způsobili inženýři dané společnosti, kteří měření záznamu pro velmi malé poruchy ignorovali. Mandelbrot se zaměřil na další data, např. tisícileté záznamy o stavu vody na Nilu, který se v různých měřítkách opakoval. Mandelbrot popsal tyto změny pomocí dvou typů efektů – nazval je efekt Noemův a Josefův.

Noemův efekt znamená nespojitost – když se některá veličina mění, může se měnit téměř libovolnou rychlostí. Typickým příkladem je burza, kde se ceny mění z minuty na minutu skokem. *Josefův efekt* znamená naopak tendenci k setrvalému stavu. Oba efekty působí proti sobě. V různých měřítkách.

Svým dílem přispěl Mandelbrotovi i L. F. Richardson, který mimo jiné poukázal na 20% rozdíl v délce hranice mezi Portugalskem a Španělskem, měřené z obou států. To dovedlo Mandelbrota k úvaze, jak je měření délky ovlivněno daným měřítkem. Odtud byl už jen krůček k fraktální dimenzi.

Jednoho pošmourného dne roku 1975, v době, kdy se podobné úvahy a myšlenky začaly objevovat i ve fyzice, se Mandelbrot rozhodl publikovat svou revoluční knihu, kterou sám označil za *manifest* a *soubor kauzistik*. Fraktálům dal jméno vybrané z latinského slovníku svého syna, kde narazil na slovo *fractus,* odvozené od slovesa zlomit. V angličtině i ve francouzštině toto slovo zní *fractal*.

Fraktální geometrie přitom není jen samoúčelná hříčka s obrázky. Její použití lze nalézt v kompresi obrazových dat, počítačovém vidění, “artwaru” (umění na počítači – slouží nejen k vytváření estetických grafik, ale také k tvorbě vzorů na různé módní materiály ap.), při studiu dynamických systémů (chaosu, katastrof, ...), v šifrování, modelování různých chemických a fyzikálních procesů, při predikci a v dalších oblastech.

Při studiu principů fraktální geometrie čtenář možná ztratí ideály dětství – už nikdy neuvidí svět, jak ho vídával doposud. Klasické objekty jako mraky, stromy, les, ba i takové jako galaxie, už bude vnímat zcela odlišným způsobem. Tato ztráta však bude kompenzována krásou jednoduchého popisu těchto objektů.

V našem seriálu se postupně seznámíte nejen s tím, co to fraktál je, ale také s tím, jak se vytváří. Nezapomeneme ani na ukázky tvorby fraktálů a na jejich použití (predikce, šifrování, počítačové vidění).

Stavba fraktálů

Jak už bylo naznačeno, fraktály jsou množiny, jejichž geometrický motiv se opakuje v základním tělese až do nekonečna. Pojem “nekonečno” však musíme chápat v matematickém slova smyslu. Ve fyzikálním světě vždy existují nějaké hranice, za kterými opakování sekvencí končí. Zmínili jsme už systém kořenů stromu. Pokud se vezme částečný výsek, pak obdržíme obrazec podobný spleti kořenů. Po určitém množství kroků narazíme na poslední, nejmenší kořínek, za nímž již žádná fraktální struktura není. To je fyzikální hranice.

Ve fraktální geometrii se fraktály dělí na dva základní druhy, totiž na fraktály soběpodobné a soběpříbuzné.

Soběpodobné fraktály jsou většinou jen čisté matematické struktury, se kterými se lze setkat jen při matematických konstrukcích. Jejich charakteristickým znakem je, že se v nich opakuje původní originální motiv mateřského tělesa. Kterýkoliv výsek je přesnou kopií původního tělesa.

Soběpříbuzné fraktály jsou útvary, se kterými se setkáváme každý den, aniž bychom si to uvědomovali. Jsou to například mraky, lesy, hory, vodní hladina, obyčejný květák, ale dokonce i takové objekty, jako je obličej ap. Pro ně je charakteristické, že kterýkoliv výsek je sice “blízký”, není ale přesnou kopií původního tělesa. Není tedy sobě “podobný”, ale jen “příbuzný”.

Konstrukce fraktálů

Vlastní konstrukce fraktálů se děje pomocí tzv. ***afinních transformací***, které s daným objektem provádějí několik operací, a to *rotaci*, *zmenšování a posuv*. Matematický popis afinní transformace je dán vztahem

V této transformaci mají jednotlivé parametry následující význam: Parametry $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ jsou “zmenšovací” parametry, které ovlivňují, jak se rozměr tělesa v příslušé ose (r_1 ☾ x {x_1}, r_2 ☾ y {x_2}) změní. Úhly θ a ϑ určují rotaci daného tělesa okolo os *x* a *y,* a parametry **e** a **f** určují, jak se těleso podél os *x* a *y* posouvá. Ukázkovou afinní transformaci znázorňuje obrázek 5.

Opakovaným aplikováním afinní transformace nebo její skupiny se dosáhne toho, že se z vlastního tělesa začne “vynořovat” fraktální struktura (obr. 6). To, jak tyto afinní transformace budou používány, ovlivní výsledný charakter fraktálu. Jestliže se budou používat všechny transformace rovnoměrně, pak se získá fraktál soběpodobný. Pokud budou používány s ohledem na uživatelsky zadané pravděpodobnosti pro každou transformaci, pak bude výsledkem fraktál soběpříbuzný.

Na obr. 6 byly použity tři afinní transformace, které vlastní těleso (hlavu) zmenšily, pootočily a posunuly (druhá hlava odspodu). Na takto získaný objekt se tyto transformace použily znovu, čímž byla získána třetí hlava atd. Iterací bylo celkem 20. V podstatě se přitom jedná o geometrické změny v závislosti na čase, které jsou zobrazeny na jednom obrázku.

Algoritmus, který ke konstrukci využívá afinních transformací, se v zahraniční literatuře nazývá **IFS** (**I**teration **F**unction **S**ystem) nebo **MRCM** (**M**ultiple **R**eduction **C**opy **M**achine), což v podstatě znamená, že se dané afinní transformace použité pro konstrukci daného fraktálu cyklicky opakují. Aplikace tohoto algoritmu může vést ke vzniku prapodivných struktur, ale také k vytvoření útvarů velmi dobře známých z běžného života. Nejlépe je to vidět na obrázku 7. Například k vytvoření “kapradiny” byl jako základní objekt použit tzv. “pan Hlava” (černý čtverec s karikaturou hlavy), na nějž bylo použito několik transformací.

Použití všech transformací jedenkrát se považuje za jednu iteraci. Znamená to, že se původní pan Hlava rozmnoží tolikrát, kolik je pro daný fraktál použito transformací. Pro “strom” je to pět transformací, proto je po první iteraci vidět pět “hlav” různě pootočených a zmenšených. Pomocí tohoto principu lze vytvářet jakékoliv objekty. Význam této konstrukce vystoupí do popředí zvláště při využití fraktálů v počítačovém vidění, o tom však až později. (*Pokračování příště.)*

Ivan Zelinka (zelinka@zlin.vutbr.cz)