

**Mathematica 4.0 není jen matematický software, ale i užitečný nástroj, jazyk a prostředí pro řešení technických problémů a prezentaci výsledků. Pokud jste se s ní ještě nesetkali, budete překvapeni, co všechno umí. Pokud znáte její předchozí verzi, oceníte zásadní zrychlení výpočtů a nové funkce.**

# Matematika za jedna

Systém **Mathematica®** od společnosti **Wolfram Research** jistě není nutné pravidelným čtenářům Chipu představovat. Těm ostatním v úvodu připomeňme, že jde o jeden z nejnámějších a nejnákladnějších matematických programů; není to ovšem žádný běžný jednoduchý software, ale důmyslný a komplexní systém. Ostatně, kdyby byl jednoduchý, nemohl by řešit skutečně velmi těžké technické problémy, a to v mnoha oblastech. Snad to trochu ilustruje i rozsah manuálu (1500 stran) – mimochodem, je velmi dobře napsaný (samozřejmě právě v prostředí Mathematica...).

## Co je Mathematica

Aniž bychom přečetli manuál celý, pochopili jsme, že Mathematica je robustní mnohafunkční systém pro řešení technických problémů. Záměrně zde neříkáme matematických, protože matematika je zde přítomna zejména jako nástroj, i když obzvláště matematici si mohou přijít na své. Ale pokud někdo řekne, že Mathematica je nástroj pro publikování nebo že to je programovací jazyk, bude mít také pravdu. Mathematica je totiž toto vše dohromady.

Mathematica byla původně navržena Stephenem Wolframem jako nástroj pro zkoumání různých myšlenek ve vědě a technologii a této zásadě zůstala věrná dodnes. Od prvního vydání v roce 1988 si získala přes milion uživatelů – inženýrů, finančních analytiků, studentů, matematiků a dalších. Byla použita k návrhu letadel, k burzovní analýze, řešení matematických problémů i k umělecké tvorbě. Dnes do ní pronikají i prvky kartografie, práce se zvukem a řada dalších nových disciplín.

Mathematica si zkrátka žije tak trochu svým vlastním životem – existuje už řada knih a časopisů, které se zabývají jen tímto systémem a vysvětlují nebo diskutují jeho použití v různých oborech či pro speciální problémy. Starší čísla těchto časopisů jsou k dispozici i na internetu (viz infotypy).

K systému se dodává základní sada programových rozšíření (tzv. “adds-on”), která je možno jednoduše “přihrát” k základnímu modulu. Tato rozšíření jsou oborová (například Algebra, Calculus, DiscreteMath, Geometry, Graphics, LinearAlgebra, Miscellaneous, NumberTheory, NumericalMath, Statistics, Utilities). Jsou vyčleněna mimo základní modul ze zřejmého důvodu – nainstaluje si je jen ten uživatel, který je využije. Kromě těchto běžných rozšíření existují i další, která jsou k dispozici na internetu; o mnohých z těchto nadstaveb jste se ostatně mohli dočíst i v Chipu.

Mathematica se ovládá pomocí vlastního jazyka a vlastního prostředí pro práci s výrazy, grafikou, zvuky, daty ap. a pro zobrazení výstupů (tzv. notebooky – jsou to obyčejné soubory a nemají s přenosnými počítači nic společného). Kdo zná některý z programovacích jazyků, brzo si zvykne na její vlastní vyjadřování, i když to pochopitelně je **jiný jazyk**. Práce s ní tedy není pro nového uživatele zcela bezbolestná (pokyn k výpočtu není jen Enter, ale Shift +Enter, argumenty se uvádějí v hranatých závorkách atd.) a vyžaduje chvíli trpělivosti. Říkáme to proto, že se člověk snadno namísá, když vidí rychlost, jakou Mathematica řeší složité výpočty, a málem by pak očekával, že na program stačí mluvit... Opak je pravdou – člověk se její jazyk a zvyky prostě musí jednou provždy naučit.

To ostatní jde už potom jako na drátku. Například vám může trvat nějakou dobu, než zjistíte, jak dostat odpověď na to, jak vypadá prvních 100 000 cifer Ludolfova čísla, ale pak už je Mathematica vypočítá za pár desítek sekund. Drtivá většina výpočtů totiž proběhne prakticky okamžitě. Ani u velmi složitých výpočtů nejsou výpočetní časy nijak velké. Posudte sami: zmíněný výpočet čísla  $\pi$  na 100 000 platných desetinných míst trval na PC Pentium/166 MHz s Windows NT 4.0 zhruba 29 sekund, což bylo mnohokrát méně než doba, po kterou jsme zjišťovali, jak to z programu “dostat”. Pokud vás to zajímá, stačí napsat **N[Pi, 100000]** a stisknout Shift+Enter.

## Pár osobních zkušeností

Jak známo, dokud nedojde k nejhoršímu, manuály se nečtou. Kdykoli jsme začali reptat, že to nebo ono není vysvětleno, museli jsme to nakonec vzít zpátky. Na všechny otázky, které nás napadly, jsme našli odpověď v manuálu nebo v helpu (čím déle jsme je hledali, tím blíže byly k začátku...). Když jsme si mysleli, že Mathematica něco neumí (ted' nemáme na mysli rozsah funkcí, ale třeba signalizaci, že zrovna počítá, nebo záležitosti kolem rozhraní), nakonec jsme se přesvědčili o opaku.

Z počátku nám uživatelské rozhraní trochu vadilo, ale pak jsme si zvykli. Určitě je dobré si přečíst, jak je to s přesností výpočtů. A pokud člověk nechce číst manuál, je vhodné si alespoň projít Tour of Mathematica buď v knižním vydání manuálu, nebo jako help v prohlížeči (Mathematica má svůj vlastní prohlížeč...). Help je skutečně velmi dobře napsán, samozřejmě hypertextově, a zároveň ukazuje i publikační možnosti systému, neboť je sám jeho produktem. Tak je například možné si v helpu při čtení o čísle  $\pi$  spustit animaci, je zde množství obrázků, ilustračních vzorců, funkcí a grafiky. Help lze procházet i po jednotlivých funkcích nebo jako rejstřík a učit se tak “on-line” přímo v něm.

## Úvaha

Naskytá se otázka, co všechno má Mathematica vlastně umět. Matematika je jako věda dost složitá, natož aplikovaná matematika v mnoha technických oborech. Autoři proto museli vybrat řadu klíčových problémů, které uživatelé musí v různých oblastech často řešit, a napsat pro ně potřebné funkce. Někdy tyto funkce stačí samy o sobě, někdy je nutné několik z nich zkombinovat do menšího či většího programu. Tady je Mathematica k dispozici jako každý jiný programovací jazyk – oproti nim však má tu výhodu, že všechny podstatné složité funkce (integrál, derivaci, maticové operace, ...) má už předprogramovány. Některým uživatelům stačí tyto funkce, jiní si mohou doprogramovat funkce pro řešení svých specifických problémů nebo “nahrát” nové vhodné rozšíření pro daný obor.

Je zřejmé, že u většiny uživatelů bude Mathematica řešit podobné nebo stejné problémy, ale opakovaně. Proto se po počátečním tréninku stane její využívání snadnou rutinní záležitostí. Vzhledem k tomu je vhodné na počátku zjistit všechno možné o jejích schopnostech pro danou úlohu

a poohlédnout se i po rozšířeních. Je na každém uživateli, aby zvážil, kolik mu Mathematica při řešení jeho problémů ušetří času. Jsme přesvědčeni, že v mnoha oborech je čas podstatný, a že se proto vyplatí do tohoto typu softwaru investovat.

## Instalace

Instalace systému na naší stanici s Windows NT 4.0 proběhla až neuvěřitelně rychle a bezproblémově během několika minut. Po celou dobu práce pak byla Mathematica stabilní a jen jednou se nám podařilo vyvolat chybu. Ale přece jen byla instalace v něčem odlišná. Při koupi obdržíte sice krabici s CD, manuály, licenčním číslem (LN) a licenčním ujednáním, ale to ještě nestačí. Wolfram Research se brání pirátským kopiím programu tak, že instalační program vygeneruje identifikační číslo (MathID) závislé na konkrétním hardwaru a toto číslo je nutné zaslat (internetem, faxem) na danou kontaktní adresu. Firma vám pak ke dvojici (MathID, LN) zašle heslo (password) – teprve s ním můžete systém používat. Změníte-li pak ovšem konfiguraci svého počítače, budete muset požádat o heslo nové...

## Co je nového ve verzi 4

To hlavní je **rychlost**. Jestliže jste si při některých operacích s velkými objemy numerických dat u verze 3 mohli v klidu vypít kávu, máte dnes smůlu. Přeprogramování některých základních postupů (v rámci projektu gigaNumerics) přineslo někde až dvousetnásobné zrychlení numerických výpočtů. Dále bylo přidáno nebo vylepšeno sto funkcí, zvýšily se schopnosti zjednodušování výrazů a zvýšil se počet datových, grafických a zvukových formátů, s nimiž program umí pracovat (dnes přes 20). Zlepšila se také práce s 2D a 3D objekty, velkými maticemi apod. Mathematica teď může exportovat své dokumenty do formátu HTML, T<sub>E</sub>X a nového standardu MathML.

## Co Mathematica umí

Je toho spousta – pro představu alespoň výběr hlavních oblastí:

- + zjednodušování matematických výrazů a práce se symbolickými proměnnými;
- + integrální a diferenciální počet (určitý i neurčitý integrál);
- + řešení nelineárních diferenciálních rovnic;
- + numerické řešení rovnic, výpočty lineární algebry (matice, vlastní čísla, inverze);
- + lineární programování, statistické funkce;
- + práce s řadami, polynomy, řešení nerovností;
- + funkce a operace z teorie čísel, komplexní čísla, kvaterniony;
- + výpočty s libovolnou požadovanou přesností;
- + kreslení grafů (1D, 2D, 3D), práce s textovými poli;

- + symbolická definice vlastních funkcí, tvorba vlastních programů;
- + rozhraní na programové úrovni pro interakce s jinými programy (například možnost volání vlastních funkcí systému z programů v jazyce C, Fortran, Java, a naopak volání externích programů z prostředí systému).

## Ukázkové příklady

Bez jakékoliv předchozí znalosti programu jsme po poměrně krátké době uměli řešit problémy, které nás napadly. Zajímalo nás třeba, kolik bitů má číslo “RSA-155” a jak vypadají. Stačilo napsat **IntegerDigits[1094...(zkráceno)...897,2]** a hned jsme viděli všech jeho 512 bitů. Možná si vzpomenete, že toto číslo (modul šifry RSA) o 155 dekadických číslicích bylo nedávno úspěšně faktorizováno – psali jsme o tom v aktualitách Chipu 10/99 (článek “Jde to i bez TWINKLE”). Také Mathematica by se jistě po příkazu **FactorInteger[1094...(zkráceno)...897]** ochotně pustila do hledání součinitelů, ale u tak velkého čísla bychom se pochopitelně výsledku nedočkali (tento problém řešily stovky počítačů přes tři měsíce a spotřebovaly na něj výpočetní výkon asi 8000 MIPS let)...

Předložili jsme jí ale k posouzení, zda nalezené faktory zmíněného složeného čísla RSA-155 jsou opravdu prvočísla. K tomu nám posloužil jednoduchý příkaz **PrimeQ[1026395...(zkráceno)...779]**. Výsledkem bylo True, což znamená, že testované číslo v hranaté závorce je opravdu prvočísla. Dále jsme chtěli vědět, jak vypadá první celé číslo, které je větší než iracionální číslo  $2^{511} * 2^{1/2}$ , a to opět v binární podobě. Přání nám splnil příkaz **IntegerDigits[IntegerPart[N[1+Sqrt[2]\*(2^511)],200]],2,512]**.

Nakonec nás zajímalo, jak svižně Mathematica zvládá modulární umocňování ( $a^b \bmod c$ ), což je základní úkon v řadě asymetrických šifer. Výsledky pro 100-, 200- nebo 300ciferná čísla a, b, c jsou – po příkazu **PowerMod[a,b,c]** – vypočítány téměř okamžitě.

Snažili jsme se také najít nějakou statistickou funkci, která by nám zodpověděla, zda obdržené rozdělení námi zkoumané náhodné veličiny je rozdělením daného konkrétního typu. Jinými slovy, hledali jsme funkci z oblasti statistického testování hypotéz. Jako standardní funkci se nám ji najít nepodařilo, ale dala by se doprogramovat.

## Rozšiřující moduly

Obdobně jako jiné nástroje, jejichž komplexnost může prakticky neomezeně narůstat, nabízí i Mathematica možnost dalšího rozšíření podporovaných funkcí pomocí takzvaných aplikačních knihoven (i o nich se v Chipu psalo; jejich aktuální stav můžete nalézt na domovské stránce Wolfram Research). Zde si v krátkosti představíme alespoň ty (z našeho úhlu pohledu) nejzajímavější zástupce.

Každému, kdo se zabývá analýzou a zpracováním signálů, udělá radost knihovna Signal and Systems, kterou může ještě vhodně zkombinovat s balíkem Wavelet Explorer. V první ze zmíněných knihoven nalezne implementace nejpoužívanějších metod matematické analýzy, které se přímo uplatní v teorii signálů. Jedná se zejména o funkce pro reprezentaci dat a základní operace nad nimi, lineární transformace typu Laplace, Fourier a tzv. Z-transformace, modely základních druhů filtrů (včetně digitálních IIF a FIR filtrů) a mnohé další.

Aplikace, pro které z nějakého důvodu není příliš vhodná Fourierova transformace (například průběhy s příliš “ostrými” hranami), potom mohou s výhodou použít ještě druhou ze zmíněných

knihoven, která implementuje v současné době stále populárnější metodu takzvané vlnkové transformace. Na rozdíl od Fourierovy transformace zde jako základní funkce nevystupuje “obyčejný” sinus a kosinus. Místo toho je daný průběh aproximován pomocí funkcí se složitějším průběhem, díky čemuž se při dobře zvolené množině aproximačních funkcí (takzvaných vlnek) dosahuje rychlejší a přesnější konvergence vymodelované funkce k jejímu originálu. Vzhledem k tomu, že z praktického hlediska představuje vlnková transformace poměrně čerstvou novinku, je celá knihovna koncipována zároveň jako učebnice, která postupně uživatele zasvětil do všech aspektů správného a efektivního používání této metody (viz též Chip 8/98).

Další zajímavou knihovnou je *Electrical Engineering Examples*. Ta může sloužit buď jako vývojový nástroj, kde se uplatní jak při analýze a návrhu nových zařízení, tak i při vytváření dokumentace (připomeňme, že *Mathematica* se velmi dobře hodí právě pro vytváření matematických prezentací), ale dobře se uplatní i jako pomůcka pro výuku v oblasti teorie elektrických obvodů. Mezi funkce nabízené touto knihovnou patří zejména obecná analýza elektronických obvodů (výpočty na grafových modelech obvodu, náhradní schémata polovodičových prvků, výpočet zkreslení ap.), výpočty parametrů přenosového vedení (parametry, odrazy, disperzní jevy atd.) a dále též návrh anténních systémů (vyzařovací charakteristiky).

Poslední knihovna, o které se zde zmíníme, se jmenuje *Fuzzy Logic*, a jak její název napovídá, jde o implementaci “fuzzy množinového aparátu”, který je dnes široce používán zejména v oblasti robotiky a umělé inteligence. Také tato knihovna může díky své koncepci sloužit jak pro analýzu a návrh fuzzy zařízení, tak i pro výuku této teorie jako takové. Díky komplexnosti použitých funkcí a jejich snadné rozšiřitelnosti mohou tento balík využít jako pomůcku pro ověřování vlastních hypotéz i matematici, kteří se zabývají přímo dalším rozvojem fuzzy množinového aparátu (viz též Chip 7/97).

Poznamenejme ještě, že rozsah nabízených knihoven (pocházejí nejen od Wolfram Research, ale i od jiných firem) se zdaleka neomezuje jen na oblasti matematiky či elektroinženýrství (které odpovídají oborovému zaměření autorů článku). V mnoha dalších knihovnách si přijdou na své třeba finanční experti či adeпти teoretické medicíny.

Další možností, jak rozšířit “akční rádius” systému, jsou zdrojové kódy, které různí uživatelé vyvinuli pro speciální problémy – i ty jsou k dispozici, a to v podobě balíku zvaného *MathSource* (viz Chip 11/99).

## Operační systém a cena

*Mathematica* je portována pro operační systémy Windows, Linux, MAC a Unix. Základní cena při nákupu verze 4 pro Windows 95/98/NT je 57 200 Kč a upgrade z verze 3.0 přijde na 22 000 Kč. Ceny pro jiné OS jsou vyšší a můžete je nalézt společně s dalšími nabídkami (doplňky, publikacemi, aplikačními knihovnamy a dalšími službami) na webové stránce českého distributora produktu, pražské firmy **Elkan**.

## Závěr

*Mathematica* verze 4 je bezesporu velmi propracovaný a silný nástroj, jehož hlavním cílem je co nejpřijatelnější formou zpřístupnit současný matematický aparát a umožnit tak jeho efektivní použití i v těch oborech, které na první pohled s matematikou jako takovou příliš nesouvisejí.

K hodnocení tohoto produktu je třeba poznamenat, že při rozsáhlosti implementovaného matematického aparátu (který se snaží v maximální možné míře držet krok s aktuálním stavem této disciplíny) není prakticky možné plně otestovat všechny nástroje, které Mathematica uživatelům nabízí. Rozhodli jsme se proto vyzkoušet její schopnosti na náhodně zvolené množině úloh, které přímo patří do našeho oboru. Zde Mathematica plně splnila naše očekávání a v mnohých situacích by nám jistě byla vítaným pomocníkem při ověřování nejrůznějších pracovních hypotéz.

Jak ale toto hodnocení zobecnit na celý produkt? Zde vycházíme z předpokladu, že ačkoliv Mathematica není produktem orientovaným ryze na diskrétní matematiku, přece jen dokázala poměrně konkrétní úlohy zvládnout k naší plné spokojenosti. Budeme-li předpokládat, že i ostatním oborům se dostalo stejné péče jako těm námi zvoleným (samotná dokumentace a on-line ukázky tomu nasvědčují), lze očekávat, že i jiný uživatel bude s tímto produktem nakonec spokojen stejně, jako jsme byli my.

*Vlastimil Klíma (v.klima@decros.cz), Tomáš Rosa (t.rosa@decros.cz)*

## **Infotipy**

**Hlavní stránka Wolfram Research, kde lze nalézt odkazy na vše, co souvisí se systémem Mathematica:** [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)

**Hlavní stránka českého distributora, společnosti Elkan:** [www.elkan.cz](http://www.elkan.cz)